座標平面上の原点から出発する動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ はサイコロを投げて 1, 2, 3, 4 の目が出ると x 軸の正の方向に 1 だけ，5, 6 の目が出ると y 軸の正の方向に 1 だけ動くものとする．サイコロを n 回投げるとき，次の問いに答えよ．

(1) $X = x$ を確率変数とする．X の確率分布，平均値および分散を求めよ．

(2) (i) $Z = x - y$ を確率変数とする．(1) を用いて，Z の確率分布を求めよ．

(ii) Z の平均値を求めよ．

(iii) Z の分散を求めよ．

(80 島根医大 3)

【答】

(1) X は二項分布 $B\left(n,\ \dfrac{2}{3}\right)$ に従う，平均値 $\dfrac{2}{3}n$，文宣 $\dfrac{2}{9}n$

(2) (i) $P(Z = 2k - n) = {}_n\mathrm{C}_k \dfrac{2^k}{3^n} \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$

(ii) $\dfrac{n}{3}$

(iii) $\dfrac{8}{9}n$

【解答】

(1) x 軸の正の方向に 1 だけ進む確率は $\dfrac{2}{3}$，y 軸の正の方向に 1 だけ進む確率は $\dfrac{1}{3}$ であるから，$X = x$ である確率は

$$P(X = x) = {}_n\mathrm{C}_x \left(\frac{2}{3}\right)^x \left(\frac{1}{3}\right)^{n-x} \quad (x = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

であり，$\boldsymbol{X}$ **は二項分布** $\boldsymbol{B\left(n,\ \dfrac{2}{3}\right)}$**に従う．** ……(答)

したがって

$$\text{平均値 } E(X) = n \cdot \frac{2}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{3}n} \qquad \text{……(答)}$$

$$\text{分散 } V(X) = n \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \boldsymbol{\frac{2}{9}n} \qquad \text{……(答)}$$

である．

(2) (i) $x + y = n$ であるから

$$Z = x - (n - x) = 2x - n \quad (x = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)$$

となり，Z の確率分布は

$$\boldsymbol{P(Z = 2k - n)} = P(X = k) = {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{2}{3}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

$$= \boldsymbol{{}_n\mathrm{C}_k \frac{2^k}{3^n} \quad (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ n)} \qquad \text{……(答)}$$

である．

(ii) $E(aX + b) = aE(X) + b$ を用いると，Z の平均値 $E(Z)$ は

$$E(Z) = E(2X - n) = 2E(X) - n = 2 \cdot \frac{2}{3}n - n = \boldsymbol{\frac{n}{3}} \qquad \text{……(答)}$$

である．

(iii) $V(aX + b) = a^2V(X)$ を用いると，Z の分散 $V(Z)$ は

$$V(Z) = V(2X - n) = 2^2V(X) = 2^2 \cdot \frac{2}{9}n = \boldsymbol{\frac{8}{9}n} \qquad \text{……(答)}$$

である．