正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す．ただし，1 および a 自身も約数とする．たとえば $f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる．次の問いに答えよ．

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする．このとき

$$f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

が成り立つことを示せ．必要ならば，$1+r+\cdots+r^m=\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}\ (r \fallingdotseq 1)$ を用いてよい．

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする．このとき

$$f(a) \geqq (p+1)q$$

が成り立つことを示せ．また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ．

(3) $a=2^2 r$，$b=2^4 s$ (r，s は正の奇数) の形をした偶数 a，b を考える．

$$\begin{cases} f(a)=2b \\ f(b)=2a \end{cases}$$

をみたす a，b を求めよ．

(02 九州大 文科系 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $a=124,\ b=112$

【解答】

(1) $a=2^m b$ において，b の約数を小さい方から $b_1(=1)$，b_2，$\cdots$，$b_k(=b)$ とおくと，a の正の約数の総和 $f(a)$ は

$$\begin{aligned} f(a) &= 2^0(b_1+b_2+\cdots+b_k)+2^1(b_1+b_2+\cdots+b_k)+\cdots+2^m(b_1+b_2+\cdots+b_k) \\ &= (2^0+2^1+\cdots+2^m)(b_1+b_2+\cdots+b_k) \\ &= \frac{2^{m+1}-1}{2-1}(b_1+b_2+\cdots+b_k) \\ &= (2^{m+1}-1)f(b) \end{aligned}$$

…… (証明終わり)

(2) $a=pq$ のとき，p は 2 以上の整数，q は 1 以上の整数より，pq, q は a の異なる約数であるから

$$f(a)=f(pq) \geqq pq+q=(p+1)q$$

…… (証明終わり)

等号が成り立つのは，$a=pq\ (\geqq 2)$ の約数が pq, q に限られるときであり，これは

$a=pq$ が素数かつ $q=1$

すなわち

p が素数かつ $q=1$

のときに限られる． …… (証明終わり)

(3) $a = 2^2 r$ (r は奇数), $b = 2^4 s$ (s は奇数)
のとき，(1) より

$$\begin{cases} f(a) = 2b \\ f(b) = 2a \end{cases} \iff \begin{cases} (2^{2+1}-1)f(r) = 2^{4+1}s \\ (2^{4+1}-1)f(s) = 2^{2+1}r \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 7f(r) = 32s & \cdots\cdots ① \\ 31f(s) = 8r & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①において，7 と 32 は互いに素であるから

$$s = 7s' \ (s' : \text{正の整数}) \qquad \cdots\cdots ①'$$

と表すことができる．②についても同様に

$$r = 31r' \ (r' : \text{正の整数}) \qquad \cdots\cdots ②'$$

と表すことができる．これにより，①，②は

$$\begin{cases} f(r) = 32s' & \cdots\cdots ③ \\ f(s) = 8r' & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

と表すことができる．

一方，(2) を用いると，②′, ①′ より $f(r)$, $f(s)$ は

$$\begin{cases} f(r) \geqq (31+1)r' = 32r' & \cdots\cdots ⑤ \\ f(s) \geqq (7+1)s' = 8s' & \cdots\cdots ⑥ \end{cases}$$

③と⑤，④と⑥より

$$\begin{cases} 32s' \geqq 32r' \\ 8r' \geqq 8s' \end{cases} \iff \begin{cases} s' \geqq r' \\ r' \geqq s' \end{cases}$$

$$\therefore \quad s' = r'$$

このとき，③, ④ は

$$f(r) = 32r', \quad f(s) = 8s'$$

となり，⑤, ⑥ はともに等号が成り立つ．⑤, ⑥ の等号成立条件より

31, 7 は素数 かつ $r' = s' = 1$

このとき，$r = 31$, $s = 7$ であり

$$a = 2^2 \cdot 31 = \mathbf{124}, \quad b = 2^4 \cdot 7 = \mathbf{112} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

である．