a, b, c を自然数とするとき，次の問いに答えよ．

(1) a が 3 の倍数でないならば，a^2-1 は 3 の倍数であることを示せ．

(2) $a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，a，b の少なくとも一方は 3 の倍数であることを示せ．

(3) a，b が互いに素で，$a^2+b^2=c^2$ が成り立つとき，c は奇数であることを示せ．

(02 関西学院大 理・工 5)

【答】

(1) 略　(2) 略　(3) 略

【解答】

(1) a は 3 の倍数でないので，$a=3a'\pm1$ (a'は整数) とおくことができる．

$$a^2-1=(3a'\pm1)^2-1=3(3a'^2\pm2a')=(3\text{ の倍数})$$

……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．a，b がともに 3 の倍数でないと仮定する．

(1) より $a^2=(3\text{ の倍数})+1$，$b^2=(3\text{ の倍数})+1$ であり，

$$a^2+b^2=(3\text{ の倍数})+2$$

一方

$$c^2=\begin{cases}3\text{ の倍数でないとき，} & (3\text{ の倍数})+1\\ 3\text{ の倍数のとき，} & (3\text{ の倍数})\end{cases}$$

であり，3 で割った余りが異なり，$a^2+b^2=c^2$ に反する．

よって a，b 少なくとも一方は 3 の倍数である．　……(証明終わり)

(3) 背理法を用いる．c が偶数であると仮定すると，$c=2c'$ (c'は整数) とおける．このとき，$a^2+b^2=c^2=4c'^2(=(\text{偶数}))$ であり，a^2, b^2 すなわち，a, b は

(i) ともに偶数　または　(ii) ともに奇数

のいずれかである．a，b が互いに素であることから (i) はあり得ない．

(ii) のとき，$a=2a'+1,\ b=2b'+1$ (a'，b'は整数) とおくことができる．

$$a^2+b^2=(2a'+1)^2+(2b'+1)^2=4(a'^2+b'^2+a'+b')+2$$
$$c^2=4c'^2$$

となり，4 で割った余りが異なり，$a^2+b^2=c^2$ に反する．

よって c は奇数である．　……(証明終わり)