平面において，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあり，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にある．P と Q が $\mathrm{PQ}=1$ を保ちながら動くとき，次の問いに答えよ．

(1) $s \neq 1$ のとき，u，v を s と t の式で表せ．
(2) 線分 PQ の中点の軌跡を図示せよ．

【答】
(1) $u=0,\ v=0$　または　$u=1+s,\ v=t$　$(s^2+t^2=1)$
(2) 略

【解答】
点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は原点 O を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$s^2+t^2=1 \qquad \cdots\cdots ①$$

点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ は点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円周上にあるから

$$(u-1)^2+v^2=1 \qquad \cdots\cdots ②$$
$$\Longleftrightarrow u^2+v^2=2u \qquad \cdots\cdots ②'$$

また，P と Q が $\mathrm{PQ}=1$ を保ちながら動くとき

$$(s-u)^2+(t-v)^2=1 \iff s^2+t^2+u^2+v^2-2su-2tv=1$$

①, ②を用いて変形すると

$$1+2u-2su-2tv=1 \iff (1-s)u=tv \qquad \cdots\cdots ③$$

となる．

(1) $s \neq 1$ のとき

$$③ \iff u=\frac{t}{1-s}v \qquad \cdots\cdots ③'$$

③′ を②に代入すると

$$\left(\frac{t}{1-s}v\right)^2+v^2=\frac{2t}{1-s}v \iff \{t^2+(1-s)^2\}v^2=2t(1-s)v \qquad \cdots\cdots ④$$

ここで

$$t^2+(1-s)^2=t^2+s^2-2s+1=2(1-s) \qquad (\because\ ①)$$

であるから

$$④ \iff 2(1-s)v^2=2t(1-s)v \iff v^2=tv$$
$$\therefore \quad v=0,\ t$$

$v=0$ のとき，③′ より

$$u=0$$

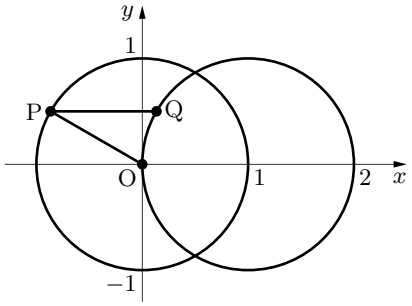
$v=t$ のとき，③′ より

$$u=\frac{t^2}{1-s}=\frac{1-s^2}{1-s}=1+s$$

したがって，$s \neq 1$ のとき，

$$\boldsymbol{u=0,\ v=0} \quad \text{または} \quad \boldsymbol{u=1+s,\ v=t} \quad \boldsymbol{(s^2+t^2=1)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．



(2) 線分 PQ の中点を M$(X,\ Y)$ とする.

(i) (1) の結果のうち，P$(s,\ t)$，Q$(0,\ 0)$ のときは

$$\begin{cases} X = \dfrac{s}{2} \\ Y = \dfrac{t}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} s = 2X \\ t = 2Y \end{cases}$$

点 $(s,\ t)$ は円①上を動くから

$$(2X)^2 + (2Y)^2 = 1 \qquad \therefore \quad X^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

(ii) (1) の結果のうち，P$(s,\ t)$，Q$(s+1,\ t)$ のときは

$$\begin{cases} X = \dfrac{2s+1}{2} \\ Y = \dfrac{2t}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} s = X - \dfrac{1}{2} \\ t = Y \end{cases}$$

点 $(s,\ t)$ は円①上を動くから

$$\left(X - \frac{1}{2}\right)^2 + Y^2 = 1$$

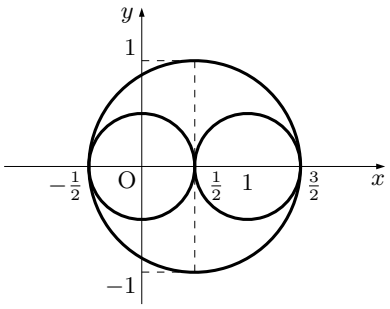
(iii) (1) で除外した $s = 1$ のときは，$t = 0$ であり，②を満たす $(u,\ v)$ はつねに PQ $= 1$ を満たす.

$$\begin{cases} X = \dfrac{1+u}{2} \\ Y = \dfrac{v}{2} \end{cases} \iff \begin{cases} u = 2X - 1 \\ v = 2Y \end{cases}$$

点 $(u,\ v)$ は円②上を動くから

$$(2X-2)^2 + (2Y)^2 = 1 \qquad \therefore \quad (X-1)^2 + Y^2 = \frac{1}{4}$$

以上，(i)，(ii)，(iii) より，線分 PQ の中点の軌跡は

$$x^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$
$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 1,$$
$$(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$

であり，図示すると右図となる.