平面上の 3 つの曲線 C_1, C_2, C_3 を次で定める．

$$C_1 : \begin{cases} x = \dfrac{15}{2}t^4 \\ y = -3t^5 + 5t^3 \end{cases} \qquad \left(0 \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : \begin{cases} x = \dfrac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)\right) \\ y = \dfrac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t + \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)\right) \end{cases} \qquad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : \begin{cases} x = 0 \\ y = \dfrac{125(t-2)}{6\left(\dfrac{7}{4} - \sqrt{\dfrac{5}{3}}\right)} \end{cases} \qquad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{1}{4} \leqq t \leqq 2\right)$$

(1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ．

(2) 原点 O を出発し，C_1, C_2, C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ．

【答】

(1) $\dfrac{12500}{567}\sqrt{\dfrac{5}{3}}$

(2) $\dfrac{50}{3}\sqrt{\dfrac{5}{3}} + \dfrac{625}{12}$

【解答】

(1) $0 \leqq t \leqq \sqrt{\dfrac{5}{3}}$ において，$x = \dfrac{15}{2}t^4$ は単調増加，$y = -3t^3\left(t^2 - \dfrac{5}{3}\right) \geqq 0$ であり，$y(0) = y\left(\sqrt{\dfrac{5}{3}}\right) = 0$ であるから，C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} y\frac{dx}{dt}\,dt = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} (-3t^5 + 5t^3)\cdot 30t^3\,dt \\ &= 30\left[-3\frac{t^9}{9} + 5\frac{t^7}{7}\right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} = 30\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{7}{2}} + \frac{5}{7}\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{7}{2}}\right) \\ &= 30\frac{-35+45}{63}\left(\frac{5}{3}\right)^3\sqrt{\frac{5}{3}} = \boldsymbol{\frac{12500}{567}\sqrt{\frac{5}{3}}} \quad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

(2) C_1, C_2, C_3 の道のりをそれぞれ l_1, l_2, l_3 とおく．

(i) l_1 について

$$\frac{dx}{dt} = 30t^3, \quad \frac{dy}{dt} = -15t^4 + 15t^2 = -15t^2(t^2-1)$$

であるから

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 &= (30t^3)^2 + \left\{-15t^2(t^2-1)\right\}^2 \\ &= 15^2t^4\{4t^2 + (t^2-1)^2\} = 15^2t^4(t^2+1)^2 \end{aligned}$$

$$\therefore\quad l_1=\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt=\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}15t^2(t^2+1)\,dt$$

$$=15\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}=15\left(\frac{1}{5}\cdot\frac{5}{3}+\frac{1}{3}\right)\left(\frac{5}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

(ii) l_2 について

$$\frac{dx}{dt}=\frac{125}{6}\cdot 3\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\left(-\sin\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right)(-2\pi)$$

$$=-125\pi\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\sin\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{125}{6}\cdot 3\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\left(\cos\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right)(-2\pi)$$

$$=125\pi\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cos\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

より

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2$$

$$=125^2\pi^2\left\{\cos^4\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right.$$

$$\left.+\sin^4\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right\}$$

$$=125^2\pi^2\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\therefore\quad l_2=\int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dx}{dt}\right)^2}\,dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}}125\pi\left|\sin\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cos\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right|dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}}\frac{125}{2}\pi\left|\sin\left(4\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right|dt$$

$$=\int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}}\frac{125}{2}\pi\left|\sin\left(4\pi\left(t-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right|dt$$

$\sqrt{\frac{5}{3}}\leqq t\leqq\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}$ のとき，$0\leqq 4\pi\left(t-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\leqq\pi$ であり，$\sin\left(4\pi\left(t-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\geqq$

0 である．

$$l_2 = \frac{125}{2}\pi \int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}} \sin\left(4\pi\left(t-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\,dt$$

$$= \frac{125}{2}\pi \left[\frac{-\cos\left(4\pi\left(t-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)}{4\pi}\right]_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}}$$

$$= \frac{125}{8}\{-\cos\pi + \cos 0\} = \frac{125}{4}$$

(iii) l_3 について

C_3 は y 軸上の線分であり，y 座標は単調増加であるから

$$l_3 = \frac{125}{6\left(\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}\left\{2-\left(\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}\right)\right\}$$

$$= \frac{125}{6\left(\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}\left(\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{125}{6}$$

以上 (i)(ii)(iii) より，求める道のりは

$$l_1 + l_2 + l_3 = \frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{125}{4} + \frac{125}{6} = \boldsymbol{\frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}} + \frac{625}{12}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

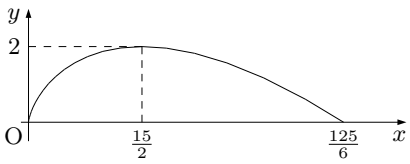
(参考)

C_1 の概形は

$$\frac{dx}{dt} = 30t^3, \quad \frac{dy}{dt} = -15t^4 + 15t^2 = -15t^2(t^2-1)$$

より x，y の増減は下の表となるから，C_1 の概形は下の右図となる．

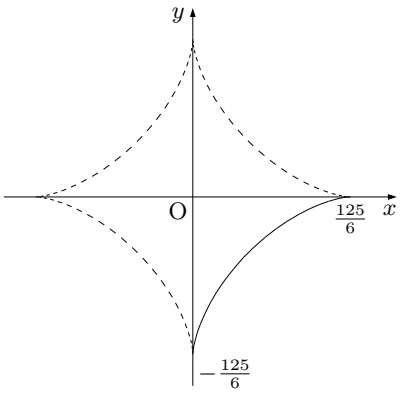
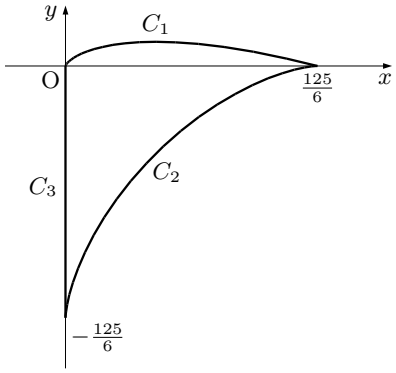
t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$
$\frac{dx}{dt}$	(0)	$+$		$+$	
x		$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\nearrow$	$\frac{125}{6}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$	
x	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0



C_2 については，$\theta = 2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$ とおくと

$$C_2 : \begin{cases} x = \frac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right) \\ y = \frac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right) \end{cases} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}\right)$$

$$\iff \begin{cases} x = \frac{125}{6}\cos^3\theta \\ y = \frac{125}{6}\sin^3\theta \end{cases} \quad \left(0 \geqq \theta \geqq -\frac{\pi}{2}\right)$$

$$\iff x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = \left(\frac{125}{6}\right)^{\frac{2}{3}} \; x \geqq 0,\ y \leqq 0,$$

これはアステロイド (星ぼう形) と呼ばれる曲線の一部である．概形は下の左図である．
これより，C_1，C_2，C_3 の概形は下の右図のようになる．