a, b を $a^2 \neq b^2$ を満たす 0 でない実数とし，A_n を次の関係式で定まる 2 次の正方行列とする．

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & a^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{n+1}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} A_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 行列 $C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ で $C\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ を満たすものを求めよ．

(2) A_n を a, b, n で表せ．

(3) $n \to \infty$ のとき A_n のすべての成分が収束するための条件を求めよ．

(05 年　理・工・医・歯・薬・農学部　5)

【答】

(1) $C = \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1}{a-b} \\ -\dfrac{1}{a-b} & 0 \end{pmatrix}$

(2) $A_n = \begin{cases} n \text{ が奇数のとき}, \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a-b} \\ -\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \\ n \text{ が偶数のとき}, \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}}{a-b} \\ -\dfrac{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}{a-b} & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$

(3) $\left|\dfrac{b}{a}\right| < 1$

【解答】

(1)
$$C\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ a & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} ay & ax \\ aw & az \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} bz & bw \\ bx & by \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay+bz & ax+bw \\ aw+bx & az+by \end{pmatrix}$$

であるから

$$C\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}C=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} ay+bz=1\\ ax+bw=0\\ aw+bx=0\\ az+by=-1\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} ay+bz=1\\ by+az=-1\end{cases} \text{ かつ } \begin{cases} ax+bw=0\\ bx+aw=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix} \text{ かつ } \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix}a & b\\ b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y & x\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}$$

$a^2-b^2\neq 0$ より

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}y & x\\ z & w\end{pmatrix}&=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix}a & -b\\ -b & a\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{a^2-b^2}\begin{pmatrix}a+b & 0\\ -b-a & 0\end{pmatrix}\\ &=\frac{1}{a-b}\begin{pmatrix}1 & 0\\ -1 & 0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，$C=\begin{pmatrix}x & y\\ z & w\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \boldsymbol{\frac{1}{a-b}}\\ \boldsymbol{-\frac{1}{a-b}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}$ ……(答)

(2) $A=\begin{pmatrix}0 & a\\ a & 0\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}0 & b\\ b & 0\end{pmatrix}$ とおくと

$$A_{n+1}A+BA_n=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

$$CA+BC=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$$

辺々引いて

$$(A_{n+1}-C)A+B(A_n-C)=O$$

$X_n=A_n-C$ とおくと，$A^{-1}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ $(\because\ a\neq 0)$ であるから

$$\begin{aligned}X_{n+1}&=-BX_nA^{-1}\\ \therefore\quad X_n&=-BX_{n-1}A^{-1}\\ &=-B(-BX_{n-2}A^{-1})A^{-1}\\ &=\cdots\\ &=(-1)^{n-1}B^{n-1}X_1(A^{-1})^{n-1}\end{aligned}$$

ここで,

$$B^2=\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}=b^2E\quad(E\text{ は単位行列})$$

$$(A^{-1})^2=\frac{1}{a^2}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2}E$$

より

$$B^n=\begin{cases}n\text{ が奇数のとき,}&b^{n-1}B\\n\text{ が偶数のとき,}&b^nE\end{cases},\quad (A^{-1})^n=\begin{cases}n\text{ が奇数のとき,}&\dfrac{1}{a^{n-1}}A^{-1}\\n\text{ が偶数のとき,}&\dfrac{1}{a^n}E\end{cases}$$

また,

$$X_1=A_1-C=\begin{pmatrix}0&\frac{1}{a}\\0&0\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&\frac{1}{a-b}\\-\frac{1}{a-b}&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac{-b}{a(a-b)}\\\frac{1}{a-b}&0\end{pmatrix}$$

であるから

(i) $n=2k-1$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned}A_n-C=X_n&=(-1)^{2k-2}B^{2k-2}X_1(A^{-1})^{2k-2}\\&=b^{2k-2}EX_1\cdot\frac{1}{a^{2k-2}}E\\&=\left(\frac{b}{a}\right)^{2k-2}\begin{pmatrix}0&\frac{-b}{a(a-b)}\\\frac{1}{a-b}&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a-b}\\\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}}{a-b}&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

(ii) $n=2k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

$$\begin{aligned}A_n-C=X_n&=(-1)^{2k-1}B^{2k-1}X_1(A^{-1})^{2k-1}\\&=-b^{2k-2}BX_1\cdot\frac{1}{a^{2k-2}}A^{-1}\\&=-\left(\frac{b}{a}\right)^{2k-2}\begin{pmatrix}0&b\\b&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac{-b}{a(a-b)}\\\frac{1}{a-b}&0\end{pmatrix}\cdot\frac{1}{a}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\\&=-\left(\frac{b}{a}\right)^{2k-1}\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{-b}{a(a-b)}&0\\0&\frac{1}{a-b}\end{pmatrix}\\&=-\left(\frac{b}{a}\right)^{2k-1}\begin{pmatrix}0&\frac{1}{a-b}\\\frac{-b}{a(a-b)}&0\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}0&-\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}}{a-b}\\\frac{\left(\frac{b}{a}\right)^n}{a-b}&0\end{pmatrix}\end{aligned}$$

よって，

$$\boldsymbol{A_n}=\begin{cases}\boldsymbol{n}\text{ が奇数のとき}, & \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \dfrac{\boldsymbol{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}}{\boldsymbol{a-b}}\\ -\dfrac{\boldsymbol{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}}}{\boldsymbol{a-b}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\\ \boldsymbol{n}\text{ が偶数のとき}, & \begin{pmatrix}\boldsymbol{0} & \dfrac{\boldsymbol{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}}}{\boldsymbol{a-b}}\\ -\dfrac{\boldsymbol{1-\left(\frac{b}{a}\right)^{n}}}{\boldsymbol{a-b}} & \boldsymbol{0}\end{pmatrix}\end{cases}$$ ……(答)

(3) $n\to\infty$ のとき A_n のすべての成分が収束するための条件は $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{n-1}$，$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{b}{a}\right)^{n}$ が収束することであり，

$$-1<\frac{b}{a}\leqq 1$$

であるが，$a\neq b$ より

$$\boldsymbol{-1<\frac{b}{a}<1}$$ ……(答)

である．