$(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3$ を因数分解せよ．

(10 専修大 ネットワーク情報 1(2))

【答】 $3(x-y)(y-z)(z-x)$

【解答】

3 項をそれぞれ展開しまとめると

$$\begin{aligned}(\text{与式}) &= (x^3-3x^2y+3xy^2-y^3)+(y^3-3y^2z+3yz^2-z^3)\\ &\qquad +(z^3-3z^2x+3zx^2-x^3)\\ &= 3(-x^2y+xy^2-y^2z+yz^2-z^2x+zx^2)\\ &= 3\{(z-y)x^2+(y^2-z^2)x+yz(z-y)\} \quad (1\text{ つの文字について整理})\\ &= 3(z-y)\{x^2-(y+z)x+yz\}\\ &= 3(z-y)(x-y)(x-z)\\ &= \boldsymbol{3(x-y)(y-z)(z-x)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

- $x-y=a$，$y-z=b$ とおくと，$a+b=x-z$ であるから

$$\begin{aligned}&(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\\ =&a^3+b^3-(a+b)^3\\ =&-3a^2b-3ab^2\\ =&-3ab(a+b)\\ =&-3(x-y)(y-z)(x-z)\\ =&3(x-y)(y-z)(z-x) \qquad \cdots\cdots(\text{答})\end{aligned}$$

- 公式 $a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$ の利用を考えて，$a=x-y,\ b=y-z,\ c=z-x$ とおくと

$$a+b+c=(x-y)+(y-z)+(z-x)=0$$

より

$$\begin{aligned}&(\text{右辺})=0\times(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)=0\\ \therefore\quad &a^3+b^3+c^3-3abc=0\end{aligned}$$

であり

$$\begin{aligned}&(x-y)^3+(y-z)^3+(z-x)^3\\ =&a^3+b^3+c^3\\ =&3abc\\ =&3(x-y)(y-z)(z-x)\end{aligned}$$