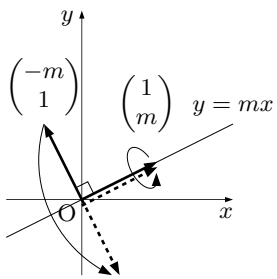
xy 平面上で，原点を中心とする角 θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ の回転を行い，さらに直線 $y = x$ に関する対称移動を行う．これが直線 $y = \sqrt{3}\,x$ に関する対称移動と一致するとき，θ の値を求めよ．

【答】 $\theta = \dfrac{11}{6}\pi$

【解答】

原点を中心とする角 θ の回転を表す行列を A とすると

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$



さらに，直線 $y = mx$ に関する対称移動を表す行列を T とおくと

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix},\ T\begin{pmatrix} -m \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m \\ -1 \end{pmatrix}$$

であり，

$$T\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}$$

$$\therefore\ T = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -m \\ m & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & m \\ m & -1 \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1 & m \\ -m & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix} 1-m^2 & 2m \\ 2m & -(1-m^2) \end{pmatrix}$$

したがって，直線 $y = x$，直線 $y = \sqrt{3}\,x$ に関する対称移動を表す行列をそれぞれ B, C とすると

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} -2 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

である．条件より

$$BA = C \iff \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{pmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin\theta = -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ より　　$\boldsymbol{\theta = \dfrac{11}{6}\pi}$　　……(答)