多項式 $f(x)=x^4-x^3+cx^2-11x+d$ について，$f(1+\sqrt{2})=0$ が成り立つとする．ここで， c, d は有理数とする．次の問いに答えよ．

(1) $S=\{a+\sqrt{2}b \,|\, a,\ b$ は有理数$\}$ とする．集合 S の元 $z=a+\sqrt{2}b$ (ただし，a, b は有理数) に対して，$j(z)=a-\sqrt{2}b$ と定義する．S の任意の元 z, w に対して，$j(z+w)=j(z)+j(w)$ および $j(zw)=j(z)j(w)$ が成り立つことを示せ．

(2) (1) を用いて，S の元 z が $f(z)=0$ を満たせば，$f(j(z))=0$ が成り立つことを示せ．このことを用いて，$f(1-\sqrt{2})=0$ を示せ．

(3) 有理数 c, d を求め，$f(x)$ を有理数の範囲で因数分解せよ．

(11 佐賀大・理工 2)

【答】

(1) 略

(2) 略

(3) $f(x)=(x^2-2x-1)(x^2+x+5)$

【解答】

(1) z, w は S の元より

$$z=a+\sqrt{2}b,\ w=e+\sqrt{2}f \quad (\text{ただし，}a,\ b,\ e,\ f\ \text{は有理数})$$

とおくことができる．このとき

$$z+w=a+e+\sqrt{2}(b+f)$$

であり

$$j(z+w)=a+e-\sqrt{2}(b+f)$$

$$j(z)+j(w)=(a-\sqrt{2}b)+(e-\sqrt{2}f)=a+e-\sqrt{2}(b+f)$$

$$\therefore\quad j(z+w)=j(z)+j(w) \qquad \cdots\cdots ①$$

……(証明終わり)

また

$$zw=(a+\sqrt{2}b)(e+\sqrt{2}f)=ae+2bf+\sqrt{2}(af+be)$$

であり

$$j(zw)=ae+2bf-\sqrt{2}(af+be)$$

$$j(z)j(w)=(a-\sqrt{2}b)(e-\sqrt{2}f)=ae+2bf-\sqrt{2}(af+be)$$

$$\therefore\quad j(zw)=j(z)j(w) \qquad \cdots\cdots ②$$

……(証明終わり)

(2)

$$f(j(z))=(j(z))^4-(j(z))^3+c(j(z))^2-11j(z)+d$$

任意の有理数 q に対して

$$j(q)=j(q+\sqrt{2}\cdot 0)=q-\sqrt{2}\cdot 0=q \qquad \therefore\quad j(q)=q \qquad \cdots\cdots ③$$

が成り立つから

$$\begin{aligned}
f(j(z))&=(j(z))^4+j(-1)(j(z))^3+j(c)(j(z))^2+j(-11)j(z)+j(d) && (\because\ ③)\\
&=j(z^4)+j(-z^3)+j(cz^2)+j(-11z)+j(d) && (\because\ ②)\\
&=j(z^4-z^3+cz^2-11z+d) && (\because\ ①)\\
&=j(0) && (\because\ f(z)=0)\\
&=0 && (\because\ ③)
\end{aligned}$$

……(証明終わり)

よって $f(1+\sqrt{2})=0$ ならば $f(1-\sqrt{2})=0$ である．　　……(証明終わり)

(3) 与えられた条件と (2) より $f(x)$ は

$$f(1+\sqrt{2})=0 \text{ かつ } f(1-\sqrt{2})=0$$

が成り立つ．すなわち，$f(x)$ は

$$\{x-(1+\sqrt{2})\}\{x-(1-\sqrt{2})\}=x^2-2x-1$$

を因数にもつ．したがって

$$x^4-x^3+cx^2-11x+d=(x^2-2x-1)(x^2+px+q)$$

とおくことができる．右辺を展開して，左辺の係数を比較すると

$$\begin{cases} p-2=-1 \\ q-1-2p=c \\ -p-2q=-11 \\ -q=d \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} p=1 \\ c=q-1-2p \\ 2q=10 \\ d=-q \end{cases}$$

したがって

$$p=1,\ q=5,\ \boldsymbol{c=2,\ d=-5}$$　　……(答)

であり

$$f(x)=(x^2-2x-1)(x^2+x+5)$$

である．$x^2+x+5=0$ の判別式 D は

$$D=1^2-4\cdot 5=-19<0$$

であり，x^2+x+5 を因数分解すると複素数が係数に現れる．

よって，$f(x)$ を有理数の範囲で因数分解すると

$$\boldsymbol{f(x)=(x^2-2x-1)(x^2+x+5)}$$　　……(答)

- (3) は割り算を実行してもよい．

$$\begin{array}{r|lllll}
 & x^2 & +x & +3+c & & \\ \hline
x^2-2x-1 & x^4 & -x^3 & +cx^2 & -11x & +d \\
 & x^4 & -2x^3 & -x^2 & & \\ \hline
 & & x^3 & +(c+1)x^2 & -11x & +d \\
 & & x^3 & -2x^2 & -x & \\ \hline
 & & & (c+3)x^2 & -10x & +d \\
 & & & (3+c)x^2 & +(-6-2c)x & -3-c \\ \hline
 & & & & (-4+2c)x & +d+3+c
\end{array}$$

$f(x)$ は x^2-2x-1 で割り切れるから

$$\begin{cases} -4+2c=0 \\ d+3+c=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad c=2,\ d=-5$$

このとき　$f(x)=(x^2-2x-1)(x^2+x+5)$

- $f(x)$ を実数の範囲で因数分解すると

$$f(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})(x^2+x+5)$$

であり，複素数の範囲で因数分解すると

$$f(x)=(x-1-\sqrt{2})(x-1+\sqrt{2})\left(x+\frac{1-\sqrt{19}i}{2}\right)\left(x+\frac{1+\sqrt{19}i}{2}\right)$$

である．