(1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ．

(2) $P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする．このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ．

(12 京都大・理 4)

【答】

(1) 略

(2) 略

【解答】

(1) 背理法を用いて証明する．

$\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定すると，$\sqrt[3]{2}$ は正だから

$$\sqrt[3]{2}=\frac{p}{q}\quad (p,\ q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおくことができる．両辺を 3 乗して

$$2=\frac{p^3}{q^3}\qquad \therefore\quad 2q^3=p^3$$

左辺は偶数だから右辺も偶数であり，$p=2r$ (r は正の整数) とおくことができる．これを代入すると

$$2q^3=8r^3\qquad \therefore\quad q^3=4r^3$$

右辺は偶数だから左辺も偶数である．したがって q も偶数であり，$p,\ q$ がともに偶数になる．これは $p,\ q$ が互いに素であることに反する．

よって $\sqrt[3]{2}$ は無理数である．　……(証明終わり)

(2) $P(x)$ を x^3-2 で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを ax^2+bx+c とおく．

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c\qquad \cdots\cdots ①$$

$P(x)$ は有理数を係数とする多項式より，$Q(x)$ も有理数を係数とする多項式で，$a,\ b,\ c$ は有理数である．

$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とおくと $\alpha^3-2=0$ である．また，与えられた条件より $P(\alpha)=0$ であるから

$$0=0\cdot Q(\alpha)+a\alpha^2+b\alpha+c$$
$$a\alpha^2+b\alpha+c=0\qquad \cdots\cdots ②$$

②に α をかけて，$\alpha^3=2$ を代入すると

$$a\alpha^3+b\alpha^2+c\alpha=0$$
$$\therefore\quad b\alpha^2+c\alpha+2a=0\qquad \cdots\cdots ③$$

② $\times\, b-$ ③ $\times\, a$ として，α^2 を消去すると

$$(b^2-ac)\alpha+bc-2a^2=0$$

$b^2-ac\neq 0$ と仮定すると

$$\alpha=-\frac{bc-2a^2}{b^2-ac}$$

(1) より左辺は無理数であり，また，$a,\ b,\ c$ は有理数より右辺は有理数だから，これは不合理である．

したがって，$b^2-ac=0$ である．このとき $bc-2a^2=0$ でもある．

$$\begin{cases} b^2-ac=0 \\ bc-2a^2=0 \end{cases} \qquad \therefore \quad \begin{cases} ac=b^2 & \cdots\cdots ④ \\ bc=2a^2 & \cdots\cdots ⑤ \end{cases}$$

$a \fallingdotseq 0$ とすると，④より $c=\dfrac{b^2}{a}$ であり，これを⑤に代入すると

$$b\cdot\frac{b^2}{a}=2a^2 \qquad \therefore \quad \left(\frac{b}{a}\right)^3=2 \qquad \therefore \quad \frac{b}{a}=\sqrt[3]{2}$$

左辺の $\dfrac{b}{a}$ は有理数であり，(1) より右辺は無理数だから，これは不合理である．

したがって，$a=0$ である．このとき③より $b=0$ である．さらに②とあわせると $c=0$ でもある．

以上より，$P(x)$ は x^3-2 で割り切れる．　　　　……(証明終わり)

- ②以降は背理法を用いて次のように示すこともできる．

$$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \qquad \cdots\cdots ②$$

$a,\ b,\ c$ は有理数である．

まずは $P(x)$ が x^3-2 で割り切れない，すなわち，$a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 0 でないと仮定する．

(i) $a=0$ のとき

$$② \iff b\alpha+c=0$$

$b \fallingdotseq 0$ と仮定すると，$\alpha=-\dfrac{c}{b}$ となる．左辺の α は無理数であり，右辺は有理数だから，これは不合理である．したがって，$b=0$ である．このとき $c=0$ でもあるこれは $a,\ b,\ c$ の少なくとも 1 つは 0 でないことに反する．

(ii) $a \fallingdotseq 0$ のとき

②を a で割って

$$\alpha^2+\frac{b}{a}\alpha+\frac{c}{a}=0$$

x^3-2 を $x^2+\dfrac{b}{a}x+\dfrac{c}{a}$ で割ったときの商を $x+d$，余りを $ex+f$ とすると

$$x^3-2=\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)(x+d)+ex+f \quad (d,\ e,\ f \text{ は有理数})$$

とおくことができる．$x=\alpha$ とおくと

$$\alpha^3-2=0\cdot(\alpha+d)+e\alpha+f \qquad \therefore \quad e\alpha+f=0$$

$e,\ f$ は有理数，α は無理数だから $e=0,\ f=0$((i) と同じく背理法を用いる) である．

$$x^3-2=\left(x^2+\frac{b}{a}x+\frac{c}{a}\right)(x+d)$$

$x=-d$ とおくと

$$(-d)^3-2=0$$

これを満たす実数 $-d$ は $-d=\sqrt[3]{2}$ に限るが，d は有理数，$\sqrt[3]{2}$ は無理数だから不合理である．

(i)，(ii) のいづれのときも不合理が生じるので，$a,\ b,\ c$ のすべては 0 であり，$P(x)$ は x^3-2 で割り切れる．