長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる．ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする．線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ} = \dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする．以下の問いに答えよ．

(1) y を x を用いて表せ．
(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ．

【答】

(1) $y = \dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

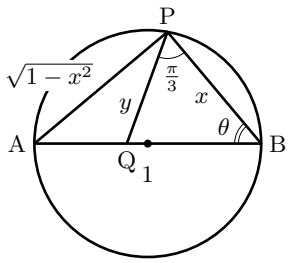
(2) $x = \dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$

【解答】

(1) $\triangle\mathrm{PAB}$ は $\angle\mathrm{APB} = \dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形であり，

$$\mathrm{AP} = \sqrt{\mathrm{AB}^2 - \mathrm{BP}^2} = \sqrt{1-x^2}$$

である．面積を考えると



$$\triangle\mathrm{PAB} = \triangle\mathrm{PAQ} + \triangle\mathrm{PBQ}$$

$$\frac{1}{2}x\sqrt{1-x^2} = \frac{1}{2}y\sqrt{1-x^2}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{3}\right) + \frac{1}{2}xy\sin\frac{\pi}{3}$$

$$x\sqrt{1-x^2} = y\left(\frac{\sqrt{1-x^2}}{2} + \frac{\sqrt{3}x}{2}\right)$$

$$\therefore \quad \boldsymbol{y = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- $\angle\mathrm{PBA} = \theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおき，$\triangle\mathrm{PQB}$ において，正弦定理を用いる．

  $\angle\mathrm{BQP} = \pi - \left(\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = \dfrac{2\pi}{3} - \theta$ より

$$\frac{y}{\sin\theta} = \frac{x}{\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\theta\right)} \qquad \therefore \quad y = \frac{x\sin\theta}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \dfrac{1}{2}\sin\theta}$$

  $\triangle\mathrm{PAB}$ は直角三角形であり

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{AB}} = x, \ \sin\theta = \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{AB}} = \sqrt{1-x^2}$$

  であるから

$$y = \frac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{3}x+\sqrt{1-x^2}}$$

(2) 点 P は 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くから

$$0 < x < 1$$

であり，$x = \cos\theta$ $\left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，(1) の式は

$$y = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$$

y を θ で微分すると

$$\frac{dy}{d\theta} = 2\cdot\frac{(-\sin^2\theta+\cos^2\theta)(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)-\cos\theta\sin\theta(\cos\theta-\sqrt{3}\sin\theta)}{(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2}$$
$$= 2\cdot\frac{\sqrt{3}\cos^3\theta-\sin^3\theta}{(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2} = 2\cdot\frac{(\sqrt{3}-\tan^3\theta)\cos^3\theta}{(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)^2}$$

$\dfrac{dy}{d\theta}$ の符号は $\sqrt{3}-\tan^3\theta$ の符号と一致する．$\tan\theta=\sqrt[6]{3}$ を満たす θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を α とおくと

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

y は $\theta=\alpha$ で極大かつ最大となる．

このとき　$x=\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{1+\tan^2\alpha}}=\boldsymbol{\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}}$　……(答)

- $x=\cos\theta$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を満たす θ は $\angle$PBA である．
- 計算は煩雑になるが，(1) の式 $y=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$ の x による微分を考えておこう．

$$(x\sqrt{1-x^2})' = \sqrt{1-x^2}+x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$
$$(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)' = \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}}+\sqrt{3} = \frac{\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}-x}{\sqrt{1-x^2}}$$

であるから

$$y' = 2\cdot\frac{(x\sqrt{1-x^2})'(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)-x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)'}{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)^2}$$
$$= 2\cdot\frac{(1-2x^2)(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)-x\sqrt{1-x^2}(\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}-x)}{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\cdot\frac{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}-\sqrt{3}x^3}{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$
$$= 2\cdot\frac{(\sqrt{1-x^2})^3-\sqrt{3}x^3}{(\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x)^2\sqrt{1-x^2}}$$

y' の符号は $(\sqrt{1-x^2})^3-\sqrt{3}x^3$，すなわち $\sqrt{1-x^2}-\sqrt[6]{3}x$ の符号と一致する．$y'=0$ となる x は，$0<x<1$ に注意すると

$$\sqrt{1-x^2}-\sqrt[6]{3}x=0 \iff 1-x^2=\sqrt[3]{3}x^2$$
$$\therefore\quad x^2=\frac{1}{1+\sqrt[3]{3}} \qquad \therefore\quad x=\frac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$$

y' の符号は $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ で正から負に変わるから，y は $x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ で極大かつ最大となる．

- (1) の式は

$$y = \frac{2\cos\theta\sin\theta}{\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta} = \frac{2}{\dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}}$$

と変形される．ここで，$f(\theta) = \dfrac{1}{\cos\theta} + \dfrac{\sqrt{3}}{\sin\theta}$ とおくと

$$f'(\theta) = \frac{\sin\theta}{\cos^2\theta} - \frac{\sqrt{3}\cos\theta}{\sin^2\theta} = \frac{\sin^3\theta - \sqrt{3}\cos^3\theta}{\cos^2\theta\sin^2\theta}$$

よって，$\tan\alpha = \sqrt[6]{3}$ $\left(0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$f(\theta)$ は $\theta = \alpha$ で極小かつ最小，すなわち y は $\theta = \alpha$ で最大となる．このとき

$$x = \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1 + \sqrt[3]{3}}}$$

θ	(0)	$\cdots$	α	$\cdots$	$\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	