空間内に 4 点 A(0, 0, 1), B(3, 1, 1), C(1, 4, 4), D(1, 1, 2) がある．点 A を含み，直線 AD に垂直な平面を L とする．以下の問いに答えよ．

(1) $0 < t < 1$ に対し，線分 BC を $t : (1-t)$ に内分する点を N とする．点 N から平面 L に下ろした垂線と L の交点を H とするとき，点 H の座標を求めよ．
(2) P を平面 L 上を動く点とするとき，$2\mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ の最小値を求めよ．

【答】

(1) $\mathrm{H}\left(\dfrac{5-10t}{3},\ \dfrac{5t-1}{3},\ \dfrac{5t-1}{3}\right)$

(2) $\dfrac{388}{9}$

【解答】

(1) H は N から平面 L に下ろした垂線の足であり，AD $\perp$ (平面 L) であるから

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{ON}} + k\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t\overrightarrow{\mathrm{BC}} + k\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$$

2 点 A, H はともに平面 L 上 にあるから，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AH}}$ であり

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = 0 \quad \cdots\cdots ①$$

である．

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AH}} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \cdot \left\{ \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} + k\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \right\} = 4 + 4t + 3k$$

より

$$① \iff k = -\frac{4}{3}(t+1)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \begin{pmatrix}3\\1\\1\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\3\\3\end{pmatrix} - \frac{4}{3}(t+1)\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\left\{ \begin{pmatrix}9-6t\\3+9t\\3+9t\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4t+4\\4t+4\\4t+4\end{pmatrix} \right\}$$

よって，　$\mathrm{H}\left(\boldsymbol{\dfrac{5-10t}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{5t-1}{3}},\ \boldsymbol{\dfrac{5t-1}{3}}\right)$　……(答)

(2) 2 点 B, C から平面 L に下ろした垂線の足を B′, C′ とすると，三平方の定理より

$$\begin{aligned} 2\mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2 &= 2(\mathrm{PB'}^2 + \mathrm{B'B}^2) + (\mathrm{PC'}^2 + \mathrm{C'C}^2) \\ &= (2\mathrm{PB'}^2 + \mathrm{PC'}^2) + (2\mathrm{B'B}^2 + \mathrm{C'C}^2) \end{aligned}$$

$2\mathrm{B'B}^2 + \mathrm{C'C}^2$ は一定より，$2\mathrm{PB}^2 + \mathrm{PC}^2$ が最小となるのは $2\mathrm{PB'}^2 + \mathrm{PC'}^2$ が最小になるときである．P から直線 B′C′ に下ろした垂線の足を Q とすると

$$\begin{aligned} 2\mathrm{PB'}^2 + \mathrm{PC'}^2 &= 2(\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{QB'}^2) + (\mathrm{PQ}^2 + \mathrm{QC'}^2) \\ &= 3\mathrm{PQ}^2 + 2\mathrm{QB'}^2 + \mathrm{QC'}^2 \\ &\geqq 2\mathrm{QB'}^2 + \mathrm{QC'}^2 \end{aligned}$$

等号は P と Q が一致するとき，すなわち P が直線 B′C′ 上にあるとき成立する．あとは，$2\mathrm{QB}'^2+\mathrm{QC}'^2$ が最小になるときであるが，これは点 Q(=P) が線分 B′C′ 上にあることが必要である．すなわち，Q(=P) は (1) で考えた線分 BC 上の点 N から平面 L に下ろした垂線の足 H である．

$$\begin{aligned}
&2\mathrm{BP}^2+\mathrm{PC}^2\\
\geqq&2\mathrm{BH}^2+\mathrm{HC}^2\\
=&2\left\{\left(\frac{10t+4}{3}\right)^2+\left(\frac{5t-4}{3}\right)^2+\left(\frac{5t-4}{3}\right)^2\right\}\\
&\quad+\left\{\left(\frac{10t-2}{3}\right)^2+\left(\frac{5t-13}{3}\right)^2+\left(\frac{5t-13}{3}\right)^2\right\}\\
=&\frac{2}{9}(150t^2+48)+\frac{1}{9}(150t^2-300t+342)\\
=&50t^2-\frac{100}{3}t+\frac{438}{9}\\
=&50\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{388}{9}
\end{aligned}$$

$0<t<1$ より，$t=\dfrac{1}{3}$ のとき，　　最小値 $\boldsymbol{\dfrac{388}{9}}$　　……(答)

- (1) の H の座標において，$t=0,\ 1$ とすると点 B′，C′ の座標である．

$$\mathrm{B}'\left(\frac{5}{3},\ -\frac{1}{3},\ -\frac{1}{3}\right),\ \mathrm{C}'\left(-\frac{5}{3},\ \frac{4}{3},\ \frac{4}{3}\right)$$

より

$$2\mathrm{B}'\mathrm{B}^2+\mathrm{C}'\mathrm{C}^2=2\left|\frac{4}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|^2+\left|\frac{8}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right|^2=\frac{2\times16+64}{3}=32$$

である．$2\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2$ が最小になるのは，P が H と一致するときであり

$$\begin{aligned}
2\mathrm{PB}^2+\mathrm{PC}^2&=(2\mathrm{PB}'^2+\mathrm{PC}'^2)+(2\mathrm{B}'\mathrm{B}^2+\mathrm{C}'\mathrm{C}^2)\\
&\geqq(2\mathrm{HB}'^2+\mathrm{HC}'^2)+32\\
&=2\left|t\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}\right|^2+\left|(1-t)\overrightarrow{\mathrm{B}'\mathrm{C}'}\right|^2+32\\
&=\{2t^2+(1-t)^2\}\left|\frac{5}{3}\begin{pmatrix}-2\\1\\1\end{pmatrix}\right|^2+32\\
&=(3t^2-2t+1)\times\frac{50}{3}+32\\
&=\frac{50}{3}\left\{3\left(t-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\right\}+32\\
&\geqq\frac{388}{9}\qquad\left(\text{等号は }t=\frac{1}{3}\text{のとき成立する}\right)
\end{aligned}$$