m を実数とする．座標平面上で直線 $y=x$ に関する対称移動を表す 1 次変換を f とし，直線 $y=mx$ に関する対称移動を表す 1 次変換を g とする．以下の問いに答えよ．

(1) 1 次変換 g を表す行列 A を求めよ．
(2) 合成変換 $g\circ f$ を表す行列 B を求めよ．
(3) $B^3=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ となる m をすべて求めよ．

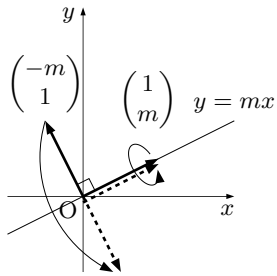
【答】

(1) $A=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2&2m\\2m&-(1-m^2)\end{pmatrix}$

(2) $B=\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}2m&1-m^2\\-(1-m^2)&2m\end{pmatrix}$

(3) $m=1,\ -2\pm\sqrt{3}$

【解答】



(1) 直線 $y=mx$ の方向ベクトル $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$，法線ベクトル $\begin{pmatrix}-m\\1\end{pmatrix}$ の 1 次変換 g による像はそれぞれ $\begin{pmatrix}1\\m\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}m\\-1\end{pmatrix}$ であるから

$$A\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&m\\m&-1\end{pmatrix}$$

$\det\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}=1+m^2\neq 0$ より，$\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}$ は逆行列 $\dfrac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1&m\\-m&1\end{pmatrix}$ をもつから

$$A=\begin{pmatrix}1&m\\m&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-m\\m&1\end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1&m\\m&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&m\\-m&1\end{pmatrix}$$
$$=\boldsymbol{\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2&2m\\2m&-(1-m^2)\end{pmatrix}}\qquad\cdots\cdots(\text{答})$$

- 問題文に，g は直線 $y=mx$ に関する対称移動を表す「1 次変換」とあるから，2 点の像を調べた．1 次変換であるという前提を使わずに，点 $(x,\ y)$ と g による像 $(x',\ y')$ との関係を調べて，変換を表す行列を求めてもよい．

$\mathrm{P}'(x',\ y')$ が $\mathrm{P}(x,\ y)$ の $y=mx$ に関する対称移動による像であるということは

$$\begin{cases}\mathrm{PP}' \text{ の中点は } y=mx \text{ 上にある}\\ \mathrm{PP}' \text{ と } y=mx \text{ は直交する}\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}\dfrac{y+y'}{2}=m\dfrac{x+x'}{2}\\ \begin{pmatrix}x'-x\\ y'-y\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1\\ m\end{pmatrix}=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}y+y'=m(x+x')\\ (x'-x)+m(y'-y)=0\end{cases}$$

式を整理し，$x',\ y'$ について解くと

$$\begin{cases}mx'-y'=-mx+y\\ x'+my'=x+my\end{cases}$$

$$\therefore\quad \begin{cases}x'=\dfrac{1-m^2}{1+m^2}x+\dfrac{2m}{1+m^2}y\\ y'=\dfrac{2m}{1+m^2}x+\dfrac{-(1-m^2)}{1+m^2}y\end{cases}$$

よって，変換 g は 1 次変換であり，1 次変換 g を表す行列 A は

$$A=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & -(1-m^2)\end{pmatrix}$$

(2) f を表す行列は，(1) の結果に $m=1$ を代入すればよく，$\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ である．したがって，$g\circ f$ を表す行列 B は

$$\begin{aligned}B&=\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}1-m^2 & 2m\\ 2m & -(1-m^2)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\\ &=\boldsymbol{\frac{1}{1+m^2}\begin{pmatrix}2m & 1-m^2\\ -(1-m^2) & 2m\end{pmatrix}}\end{aligned}$$

……(答)

- 直線 $y=x$ に関する対称移動により，点 $(x,\ y)$ は点 $(y,\ x)$ に移るから，$(x,\ y)$ の像を $(x',\ y')$ とすると

$$\begin{pmatrix}x'\\ y'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}y\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\cdot x+1\cdot y\\ 1\cdot x+0\cdot y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}$$

であり，f を表す行列は $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ である．

(3) (2) の行列は $\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ とおけて

$$a^2+b^2=\left(\frac{2m}{1+m^2}\right)^2+\left(-\frac{1-m^2}{1+m^2}\right)^2=\frac{1+2m^2+m^4}{(1+m^2)^2}=1$$

より

$$a=\cos\alpha,\quad b=\sin\alpha\quad(0\leqq\alpha<2\pi)$$

とおける．このとき

$$B=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}$$

であり，B は原点を中心とする回転角 α の回転移動を表す行列である．

$$B^3=\begin{pmatrix}\cos\alpha & -\sin\alpha\\ \sin\alpha & \cos\alpha\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}\cos 3\alpha & -\sin 3\alpha\\ \sin 3\alpha & \cos 3\alpha\end{pmatrix}$$

であり

$$B^3=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\iff\begin{cases}\cos 3\alpha=1\\ \sin 3\alpha=0\end{cases}$$

$0\leqq 3\alpha<6\pi$ より

$$3\alpha=0,\ 2\pi,\ 4\pi\qquad\therefore\quad\alpha=0,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{4}{3}\pi$$

(i) $\alpha=0$ のとき，$(a,\ b)=(1,\ 0)$ より

$$\begin{cases}\dfrac{2m}{1+m^2}=1\\ -\dfrac{1-m^2}{1+m^2}=0\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}(m-1)^2=0\\ m^2=1\end{cases}\qquad\therefore\quad m=1$$

(ii) $\alpha=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より

$$\begin{cases}\dfrac{2m}{1+m^2}=-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1-m^2}{1+m^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}m^2+4m+1=0\\ m^2=\dfrac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=(2+\sqrt{3})^2\end{cases}$$

それぞれ解くと

$$\begin{cases}m=-2\pm\sqrt{3}\\ m=\pm(2+\sqrt{3})\end{cases}\qquad\therefore\quad m=-2-\sqrt{3}$$

(iii) $\alpha=\dfrac{4}{3}\pi$ のとき，$(a,\ b)=\left(-\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より

$$\begin{cases}\dfrac{2m}{1+m^2}=-\dfrac{1}{2}\\ -\dfrac{1-m^2}{1+m^2}=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\qquad\therefore\quad\begin{cases}m^2+4m+1=0\\ m^2=\dfrac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}=(2-\sqrt{3})^2\end{cases}$$

それぞれ解くと

$$\begin{cases}m=-2\pm\sqrt{3}\\ m=\pm(2-\sqrt{3})\end{cases}\qquad\therefore\quad m=-2+\sqrt{3}$$

以上 (i)，(ii)，(iii) より，　$m=\mathbf{1},\ \mathbf{-2\pm\sqrt{3}}$ ……(答)

- 一般に，直線 $y=x\tan\varphi_1$，$y=x\tan\varphi_2$ $(\varphi_1<\varphi_2)$ に関する対称移動を表す 1 次変換をそれぞれ h_1，h_2 とおくと，$h_2\circ h_1$ は原点のまわりに $2(\varphi_2-\varphi_1)$ 回転する 1 次変換である．

本問の $g\circ f$ も原点のまわりに回転する 1 次変換である．実際，$-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{2}$ として，$m=\tan\dfrac{\theta}{2}$ とおくと

$$\frac{2m}{1+m^2}=2\tan\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{2}=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\sin\theta$$
$$\frac{1-m^2}{1+m^2}=\left(1-\tan^2\frac{\theta}{2}\right)\cos^2\frac{\theta}{2}=\cos^2\frac{\theta}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}=\cos\theta$$

より

$$B=\begin{pmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{pmatrix}$$

さらに，$\theta=\dfrac{\pi}{2}+\varphi$ とおくと

$$B=\begin{pmatrix}\cos\varphi & -\sin\varphi\\ \sin\varphi & \cos\varphi\end{pmatrix}$$

である．

B は原点を中心とする回転角 φ の回転移動を表す行列であるから

$$B^3=\begin{pmatrix}\cos3\varphi & -\sin3\varphi\\ \sin3\varphi & \cos3\varphi\end{pmatrix}$$

であり，$-\pi<\theta<\pi$ であることより $3\varphi=3\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)$ は

$$-\frac{9}{2}\pi<3\varphi<\frac{3}{2}\pi$$

の範囲を動く．

$$B^3=E\iff\begin{cases}\cos3\varphi=1\\ \sin3\varphi=0\end{cases}$$
$$\therefore\quad 3\varphi=-4\pi,\ -2\pi,\ 0\qquad\therefore\quad\varphi=-\frac{4}{3}\pi,\ -\frac{2}{3}\pi,\ 0$$

よって，

$$m=\tan\frac{\theta}{2}=\tan\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\varphi}{2}\right)=\frac{\tan\frac{\pi}{4}+\tan\frac{\varphi}{2}}{1-\tan\frac{\pi}{4}\cdot\tan\frac{\varphi}{2}}$$
$$=\frac{1-\tan\frac{2}{3}\pi}{1+\tan\frac{2}{3}\pi},\ \frac{1-\tan\frac{\pi}{3}}{1+\tan\frac{\pi}{3}},\ \frac{1+0}{1-0}$$
$$=-2-\sqrt{3},\ -2+\sqrt{3},\ 1$$

- (2) の行列 B について，ケーリー・ハミルトンの定理を用いると

$$B^2-\frac{4m}{1+m^2}B+E=O$$

これを使い次数下げすると

$$B^3=B^2B=\left(\frac{4m}{1+m^2}B-E\right)B=\frac{4m}{1+m^2}\left(\frac{4m}{1+m^2}B-E\right)-B$$
$$=\left\{\left(\frac{4m}{1+m^2}\right)^2-1\right\}B-\frac{4m}{1+m^2}E$$

$$B^3 = E \iff \left\{\left(\frac{4m}{1+m^2}\right)^2 - 1\right\}B - \left(\frac{4m}{1+m^2}+1\right)E = O$$

$$\iff \left(\frac{4m}{1+m^2}+1\right)\left\{\left(\frac{4m}{1+m^2}-1\right)B - E\right\} = O$$

$\dfrac{4m}{1+m^2}+1=0$ のとき

$$m^2+4m+1=0 \qquad \therefore \quad m=-2\pm\sqrt{3}$$

$\dfrac{4m}{1+m^2}+1 \neq 0$ のとき

$\left(\dfrac{4m}{1+m^2}-1\right)B-E=O$ より $B=kE$ (k は実数の定数) とおける.

$$B^3 = E \iff (k^3-1)E = O$$

k は実数より　$k=1$

$$\left(\frac{4m}{1+m^2}-1\right)E - E = O \qquad \frac{4m-2(1+m^2)}{1+m^2}E = O$$

$$m^2-2m+1=0 \qquad \therefore \quad m=1$$

よって，求める m の値は　　$m=1,\ -2\pm\sqrt{3}$