

$3 + \sqrt{2}$ の小数部分を a とするとき、次の計算をせよ。

(i) $a + \frac{1}{a} = \boxed{\text{ア}} \sqrt{\boxed{\text{イ}}}$ である。

(ii) $a^3 - \frac{1}{a^3} = \boxed{\text{ウエオ}}$ である。

(13 九州産大 情報 工 1(1))

ア	イ	ウエオ
2	2	-14

【チェック・チェック】

(i) 実数 x の小数部分は整数部分が n と分れば、 $x - n$ です。

(ii) $a^3 - \frac{1}{a^3}$ は a と $-\frac{1}{a}$ の対称式より、基本対称式 $a + \left(-\frac{1}{a}\right)$, $a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) = -1$, すなわち $a - \frac{1}{a}$ で表すことができます。

【解答】

(i) $1 < \sqrt{2} < 2$ より、 $4 < 3 + \sqrt{2} < 5$ であり、 $a = 3 + \sqrt{2}$ の

整数部分は 4,

小数部分は $a = (3 + \sqrt{2}) - 4 = \sqrt{2} - 1$

である。これより

$$\begin{aligned} a + \frac{1}{a} &= (\sqrt{2} - 1) + \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \sqrt{2} - 1 + \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} \\ &= 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

……(答)

← 整数 n に対して実数 x が $n \leq x < n + 1$ を満たすとき、 x の小数部分は $x - n$ である。チェックリビ

← 分母の有理化
チェックリビ 9

(ii)
$$\begin{aligned} a^3 - \frac{1}{a^3} &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 - 3a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \left(a - \frac{1}{a}\right) \\ &= \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3 \left(a - \frac{1}{a}\right) \end{aligned}$$

← $a, -\frac{1}{a}$ の対称式
チェックリビ

ここで

$$\begin{aligned} a - \frac{1}{a} &= (\sqrt{2} - 1) - \frac{1}{\sqrt{2} - 1} \\ &= \sqrt{2} - 1 - \frac{\sqrt{2} + 1}{2 - 1} \\ &= -2 \end{aligned}$$

← 分母の有理化

であるから

$$a^3 - \frac{1}{a^3} = (-2)^3 + 3(-2) = -14$$

……(答)