n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする.

(1) a と b は整数であることを示せ.
(2) a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ.

(13 京都大 文系 3)

(1) 略
(2) 略

【チェック・チェック】

整式の割り算と整数の融合問題です.

(1) $a,\ b$ を k で表してみましょう.
(2) 「〜でない」の証明では背理法が有効のことが多いものです.

【解答】

(1) 整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ より，商を $Q(x)$ おくと

$$x^n = (x-k)(x-k-1)Q(x) + ax + b$$

←― 整式の割り算

$x = k,\ k+1$ を代入すると

$$\begin{cases} k^n = ak + b & \cdots\cdots ① \\ (k+1)^n = a(k+1) + b & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

解くと

$$a = (k+1)^n - k^n$$
$$b = k^n(k+1) - (k+1)^n k$$

n と k は自然数より，a と b は整数である． ……(証明終わり)

(2) 背理法を用いる．

←― 「〜でない」の証明は背理法が有効のことが多い.

a と b をともに割り切る素数 p が存在すると仮定すると

$$a = pa',\ b = pb'\ (a',\ b' \text{は整数})$$

とおくことができる．①，②は

$$\begin{cases} k^n = p(a'k + b') \\ (k+1)^n = p\{a'(k+1) + b'\} \end{cases}$$

$a'k + b',\ a'(k+1) + b'$ は整数より，素数 p は $k^n,\ (k+1)^n$ の約数であるから，素数 p は $k,\ k+1$ の約数でもある．

←― p が素数であることが大切.

$$k = pc,\ k+1 = pd\ (c,\ d \text{ は整数})$$

とおくことができる．辺々引くと

$$p(d-c) = 1$$

$d-c$ は整数であり，素数 p は 1 の約数ということになる．これは不合理である．

←― 1 の正の約数は 1 のみであるが，1 は素数ではないから素数 p が 1 と一致することはない.

よって，a と b をともに割り切る素数 p は存在しない．

……(証明終わり)