$a,\ b$ は実数であり，$a \neq 0$ とする．$P(x)=ax+b$ に対して，次の問いに答えよ．

(1) 等式 $x=aP(x)+b$ が，どのような x の値に対しても成り立つとする．このとき，$a,\ b$ のみたす条件を求めよ．

(2) $Q(x)=aP(x)+b$ とおく．等式 $P(x)=aQ(x)+b$ が，どのような x の値に対しても成り立つとする．このとき，$a,\ b$ のみたす条件を求めよ．

(13 奈良女大 後期 理 (数)1)

(1) $(a,\ b)=(1,\ 0),\ (-1,$ 任意$)$
(2) $(a,\ b)=(1,\ 0),\ (-1,$ 任意$)$

【チェック・チェック】

「どのような x の値に対しても〜」とあるので，与えられた等式は x についての恒等式です．両辺の係数を比較しましょう．

【解答】

(1) $$aP(x)+b=a(ax+b)+b=a^2x+(a+1)b$$
より

$$x=aP(x)+b \iff x=a^2x+(a+1)b$$

これがどのような x の値に対しても成り立つから　　← x についての恒等式

$$\begin{cases} a^2=1 & \cdots\cdots ① \\ (a+1)b=0 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

← 係数比較
チェクリピ IIB 13

①より　$a=\pm 1$
$a=1$ のとき，②は $2\cdot b=0$ であり，$b=0$
$a=-1$ のとき，②は $0\cdot b=0$ であり，b は任意
よって，　**$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (-1,\ $任意$)$**　$\cdots\cdots$(答)

(2) $Q(x)=aP(x)+b=a^2x+(a+1)b$ より

$$aQ(x)+b=a(a^2x+(a+1)b)+b=a^3x+(a^2+a+1)b$$

であり

$$P(x)=aQ(x)+b \iff ax+b=a^3x+(a^2+a+1)b$$

これがどのような x の値に対しても成り立つから　　← x についての恒等式

$$\begin{cases} a^3=a & \cdots\cdots ③ \\ (a^2+a+1)b=b & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

← 係数比較

$a\neq 0$ かつ③より　$a=\pm 1$　　← 条件 $a\neq 0$ を忘れないこと
$a=1$ のとき，④は $3\cdot b=b$ であり，$b=0$
$a=-1$ のとき，④は $1\cdot b=b$ であり，b は任意
よって，　**$(a,\ b)=(1,\ 0),\ (-1,\ $任意$)$**　$\cdots\cdots$(答)　　← あれ，(1) と同じ結果だ．

- $P(x)=ax+b$ より $aP(x)+b=P(P(x))$ であり，また，$a\neq 0$ より $P(x)$ は逆関数をもつから，(1) の等式は

$$\begin{aligned} x=aP(x)+b &\iff x=P(P(x)) \\ &\iff P^{-1}(x)=P(x) \end{aligned}$$

← チェクリピ III 92

　であり，(1) は $P(x)$ が逆関数 $P^{-1}(x)$ と一致するための a，b の条件を求めている．

- $Q(x)=aP(x)+b=P(P(x))$ より，(2) の等式は

$$\begin{aligned} P(x)=aQ(x)+b &\iff P(x)=P(Q(x)) \\ &\iff P(x)=P(P(P(x))) \\ &\iff x=P(P(x)) \end{aligned}$$

　これは (1) と同じ等式である．　　← なるほど，(1) と同じ結果になるわけだ．