すべての実数 x に対し, $x^3+2x^2+3x+4=a(x-10)^3+b(x-10)^2+c(x-10)+d$ となるような定数 $a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ.

(13 山梨大 工・生命環境 1(3))

 $a=1,\ b=32,\ c=343,\ d=1234$

【チェック・チェック】

恒等式の扱いとしては

- 数値代入(必要条件なので,逆の証明が必要)
- 係数比較

があります.

数値を代入するならxに10を代入しますね. これによりdの値は決まりますが、他の値はどうしましょう.

係数比較として右辺を展開してしまうと、つぎは連立方程式の計算になります. これは避けたいですね.

【解答】

$$x^{3} + 2x^{2} + 3x + 4 = a(x - 10)^{3} + b(x - 10)^{2} + c(x - 10) + d$$
..... (*)

(*) において、x = 10 を代入すると

$$10^3 + 2 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 4 = d \cdot \dots \cdot \boxed{1}$$

d = 1234

(*) と ① の辺々の差をつくると

$$(x^3 - 10^3) + 2(x^2 - 10^2) + 3(x - 10)$$

= $a(x - 10)^3 + b(x - 10)^2 + c(x - 10)$

両辺を x-10 で割ると

$$(x^{2} + 10x + 100) + 2(x + 10) + 3$$
$$= a(x - 10)^{2} + b(x - 10) + c \cdots 2$$

②において、x = 10 を代入すると

$$(10^2 + 10 \cdot 10 + 100) + 2(10 + 10) + 3 = c \cdots$$
 ③
 $\therefore c = 343$

② と ③ の辺々の差をつくると

$$\{(x^2-10^2)+10(x-10)\}+2(x-10)=a(x-10)^2+b(x-10)$$

両辺を x-10 で割ると

$$(x+10) + 10 + 2 = a(x-10) + b$$

 $x + 22 = a(x-10) + b \cdots$ 4

④において、x = 10 を代入すると

$$10 + 22 = b \cdots \odot$$

$$b = 32$$

④ と ⑤ の辺々の差をつくると

$$x - 10 = a(x - 10)$$

両辺を x-10 で割ると

$$a = 1$$

← 高々3次の恒等式に 数値代入

← 高々2 次の恒等式に 数値代入

← 高々1 次の恒等式に 数値代入 逆に a = 1, b = 32, c = 343, d = 1234 のとき

(*) の右辺

$$=(x-10)^3 + 32(x-10)^2 + 343(x-10) + 1234$$
$$=(x^3 - 30x^2 + 300x - 1000)$$
$$+ 32(x^2 - 20x + 100) + 343(x-10) + 1234$$

$$=x^3 + 2x^2 + 3x + 4$$

=(*) の左辺

となり、(*)は成り立つ。よって

$$a = 1, b = 32, c = 343, d = 1234$$

……(答) ← チェクリピ 14

• 解答では $\lceil x - 10 \rceil$ で割って $\lceil x = 10 \rceil$ を代入する $\lceil x - 10 \rceil$ という操作 を何回か繰り返している. x-10 で割るということは. $x \neq 10$ という条件をつけたことになる. この式に x = 10 を代入して よいのだろうか.

例えば、②は、 $x \neq 10$ のもとで成り立つ等式ということに なる.

f(x), q(x) が高々 n 次の整式であるとき,

すべての x に対して f(x) = g(x) が成り立つ

 \iff 異なる n+1 個の x に対して f(x)=g(x) が成り立つ

という定理がある. ②は高々2次の等式であり, $x \neq 10$ を満 たすすべてのxに対して②が成り立つということは、異なる3個以上のxに対して②は成り立つということである。すなわ ち、②は x = 10 も含めたすべての x に対して成り立つという ことになる.

したがって、②に x = 10 を代入することができる.

[別解] $x^3 + 2x^2 + 3x + 4 = a(x-10)^3 + b(x-10)^2 + c(x-10) + d$ t=x-10 とおくと

$$at^{3} + bt^{2} + ct + d$$

$$= (t+10)^{3} + 2(t+10)^{2} + 3(t+10) + 4$$

$$= (t^{3} + 30t^{2} + 300t + 1000)$$

$$+ 2(t^{2} + 20t + 100) + 3(t+10) + 4$$

$$= t^{3} + 32t^{2} + 343t + 1234$$

これがすべての実数 t に対して成り立つから

$$a = 1, b = 32, c = 343, d = 1234$$

- 十分性の確認を忘れ

ない

← この定理は覚えておこう

← 右辺の展開を避ける ための工夫

← 係数比較