a を定数とする．次の x, y, z に関する連立方程式

$$\begin{cases} 3x - y + z = 2a \\ x + 3y + 2z = -11a \\ x^2 + y^2 - z = 0 \end{cases}$$

について以下の問いに答えよ．

(1) この方程式がただ 1 つの解をもつための a の値を求め，そのときの解を求めよ．

(2) この方程式が $x > -1$ の範囲に解をもつための a の値の範囲を求めよ．

(13 信州大 後期 理 1)

(1) $a = -1$ のとき，$(x,\ y,\ z) = (-2,\ 1,\ 5)$,

$a = \dfrac{1}{9}$ のとき，$(x,\ y,\ z) = \left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{9}\right)$

(2) $-\dfrac{7}{9} < a \leqq \dfrac{1}{9}$

【チェック・チェック】

第 1 式，第 2 式より x，y，z のうちの 1 文字で他の 2 文字を表すことができ，それを第 3 式に代入すると 2 次方程式が得られます．

(1) ではどの文字で表しても大差ありませんが，(2) では $x > -1$ という条件があるので x についての 2 次方程式をつくるべきでしょう．

ここから先は 2 次方程式の解の状態を調べることになります．

【解答】

(1)
$$\begin{cases} 3x - y + z = 2a & \cdots\cdots ① \\ x + 3y + 2z = -11a & \cdots\cdots ② \\ x^2 + y^2 - z = 0 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

①，②より，y，z を x を用いて表す．

①$\times 2 -$② より　$5x - 5y = 15a$

$$\therefore \quad y = x - 3a \qquad \cdots\cdots ④$$

①$\times 3 +$② より　$10x + 5z = -5a$

$$\therefore \quad z = -2x - a \qquad \cdots\cdots ⑤$$

④，⑤ を③に代入すると

$$x^2 + (x - 3a)^2 - (-2x - a) = 0$$

$$\therefore \quad 2x^2 - 2(3a - 1)x + 9a^2 + a = 0 \qquad \cdots\cdots ⑥$$

⑥の解 x が決まれば④，⑤より，y，z はただ一組決まるから，連立方程式 $\{①,\ ②,\ ③\}$ がただ 1 つの解をもつことと 2 次方程式⑥がただひとつの解をもつことは同値である．

⑥の判別式を D とおくと，求める条件は $D = 0$ である．

$$\begin{aligned} \frac{D}{4} &= (3a - 1)^2 - 2(9a^2 + a) \\ &= -9a^2 - 8a + 1 \\ &= -(a + 1)(9a - 1) \end{aligned}$$

より，求める a の値は

$$a = -1,\ \frac{1}{9}$$

である．$D = 0$ のとき $x = \dfrac{3a - 1}{2}$ であるから

$\boldsymbol{a = -1}$ **のとき**，$(x,\ y,\ z) = \boldsymbol{(-2,\ 1,\ 5)}$ ……(答)

$\boldsymbol{a = \dfrac{1}{9}}$ **のとき**，$(x,\ y,\ z) = \boldsymbol{\left(-\dfrac{1}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{9}\right)}$ ……(答)

(2) 連立方程式 $\{①,\ ②,\ ③\}$ が $x > -1$ の範囲に解をもつことと「2 次方程式⑥ が $x > -1$ の範囲に解をもつ ……$(*)$」ことは同値である．

$f(x) = 2x^2 - 2(3a - 1)x + 9a^2 + a$ とおき，軸 $x = \dfrac{3a - 1}{2}$ の位置で場合分けしながら，$(*)$ を満たす a の条件を求める．

(i) $\dfrac{3a - 1}{2} \leqq -1 \ \left(a \leqq -\dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$$(*) \iff f(-1) < 0$$

⟵ (2) を見据えて，x を残すことにする

⟵ ここが大切 !!

⟵ $D = 0 \iff$ 重解
チェクリピ 93(1)

⟵ y，z の値は④，⑤を用いる

⟵ これにより本問は 2 次方程式の解の配置の問題となった．
チェクリピ

ここで

$$f(-1) = 2 + 2(3a-1) + 9a^2 + a$$
$$= a(9a+7)$$

より

$$-\frac{7}{9} < a \leqq -\frac{1}{3}$$

(ii) $\dfrac{3a-1}{2} > -1$ $\left(a > -\dfrac{1}{3}\right)$ のとき

$$(*) \iff D = -(a+1)(9a-1) \geqq 0$$

$$-\frac{1}{3} < a \leqq \frac{1}{9}$$

(i) または (ii) をまとめると

$$\boldsymbol{-\frac{7}{9} < a \leqq \frac{1}{9}}$$ ……(答)