4 次式 $x^4-2x^3+x^2-1$ を係数が整数であるような 2 次式 2 個の積に因数分解すると，$x^4-2x^3+x^2-1=$ $\boxed{\text{オ}}$ となる．方程式 $x^4-2x^3+x^2-1=0$ の 4 つの解を $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta$ とすると，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2=$ $\boxed{\text{カ}}$ であり，$\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3=$ $\boxed{\text{キ}}$ である．

(13 山梨大 後期 医 1(4))

【答】

オ	カ	キ
$(x^2-x+1)(x^2-x-1)$	2	2

【チェック・チェック】

x に ± 1 を代入しても与式は 0 とはならないので，因数定理を用いて因数分解することはできません (有理数の範囲で 1 次の因数を見つけることはできない)．因数分解のために何らかの式変形が必要です．

次に，α，β，γ，δ についての 2 つの式は対称式であることに着目します．ここでは 4 文字の対称式とみるのではなく，2 次方程式の 2 つの解が α，β，γ，δ なので，1 つの 2 次方程式の解を α，β，他の 2 次方程式の解を γ，δ とすると，与えられた 2 つの式はともに α，β についての対称式と γ，δ についての対称式の和とみることができます．あとは，解と係数の関係の登場です．

【解答】

与えられた 4 次式は

$$
\begin{aligned}
&x^4-2x^3+x^2-1\\
=&x^2(x-1)^2-1\\
=&(x^2-x)^2-1^2\\
=&\boldsymbol{(x^2-x+1)(x^2-x-1)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

$\longleftarrow$ A^2-B^2 $=(A+B)(A-B)$

求める 2 式はともに α，β，γ，δ の対称式だから，α，β を $x^2-x+1=0$ の解，γ，δ を $x^2-x-1=0$ の解としてよい．このとき，解と係数の関係より

$$
\begin{cases}\alpha+\beta=1\\ \alpha\beta=1\end{cases}\quad
\begin{cases}\gamma+\delta=1\\ \gamma\delta=-1\end{cases}
$$

$\longleftarrow$ チェクリピ 47

である．これを用いると

$$
\begin{aligned}
&\alpha^2+\beta^2+\gamma^2+\delta^2\\
=&(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+(\gamma+\delta)^2-2\gamma\delta\\
=&1^2-2\cdot 1+1^2-2\cdot(-1)\\
=&\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

$\longleftarrow$ 対称式は基本対称式で表すことができる

また

$$
\begin{aligned}
&\alpha^3+\beta^3+\gamma^3+\delta^3\\
=&(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)+(\gamma+\delta)^3-3\gamma\delta(\gamma+\delta)\\
=&1^3-3\cdot 1\cdot 1+1^3-3\cdot(-1)\cdot 1\\
=&\mathbf{2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$

$\longleftarrow$ 対称式は基本対称式で表すことができる

- α，β を $x^2-x+1=0$ の解とすると

$$
\begin{cases}\alpha^2=\alpha-1\\ \beta^2=\beta-1\end{cases}
$$

両辺にそれぞれ α^n，β^n をかけて

$$
\begin{cases}\alpha^{n+2}=\alpha^{n+1}-\alpha^n\\ \beta^{n+2}=\beta^{n+1}-\beta^n\end{cases}
$$

辺々加えて，$S_n = \alpha^n + \beta^n$ とおくと

$$S_{n+2} = S_{n+1} - S_n$$

$\longleftarrow$ $\{S_n\}$ についての 3 項間漸化式をつくった

$S_0 = \alpha^0 + \beta^0 = 1 + 1 = 2$ ，$S_1 = \alpha + \beta = 1$ より

$$S_2 = S_1 - S_0 = 1 - 2 = -1$$
$$S_3 = S_2 - S_1 = (-1) - 1 = -2$$

同じく，$T_n = \gamma^n + \delta^n$ とおくと

$$T_{n+2} = T_{n+1} + T_n,\ T_0 = 2,\ T_1 = 1$$

$\longleftarrow$ $\{T_n\}$ についての 3 項間漸化式をつくった

より

$$T_2 = T_1 + T_0 = 1 + 2 = 3$$
$$T_3 = T_2 + T_1 = 3 + 1 = 4$$

よって，

$$\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2 = S_2 + T_2 = -1 + 3 = 2$$
$$\alpha^3 + \beta^3 + \gamma^3 + \delta^3 = S_3 + T_3 = -2 + 4 = 2$$