2 つの実数 a, b は $|2a|-2<b<2$ をみたしている．このとき，x の 4 次方程式

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \qquad \cdots\cdots (\star)$$

を考える．

(1) $x \fallingdotseq 0$ とする．$z=x+\dfrac{1}{x}$ とおくとき，方程式 $(\star)$ を z で表せ．

(2) (1) で求めた z の方程式の解は，すべて絶対値が 2 以下の実数であることを示せ．

(3) 複素数 $\alpha=p+qi$ (p, q は実数) に対し，$\sqrt{p^2+q^2}$ を複素数 α の「大きさ」ということにする．ただし i は虚数単位を表す．このとき，4 次方程式 $(\star)$ の解はすべて虚数で，それらの大きさはすべて 1 であることを示せ．

(13 愛知教大 7)

(1) $z^2+az+b-2=0$
(2) 略
(3) 略

【チェック・チェック】

降べき（または昇べき）の順に整式 $f(x)$ を整理したときに，係数が左右対称になるような方程式 $f(x)=0$ を相反方程式といいます．

$$ax^4+bx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a \fallingdotseq 0)$$
$$ax^5+bx^4+cx^3+cx^2+bx+a=0 \quad (a \fallingdotseq 0)$$

などです．奇数次の相反方程式は $x+1$ を因数にもつので，因数分解し $(x+1)\{\cdots\}=0$ と変形すると，結局は 1 つ次数を下げた偶数次の相反方程式の問題となります．

【解答】

$$x^4+ax^3+bx^2+ax+1=0 \qquad \cdots\cdots (\star)$$

(1) $(\star)$ に $x=0$ を代入しても成り立たないので，$x \fallingdotseq 0$ である．両辺を x^2 で割ると

$$x^2+ax+b+a\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=0$$
$$\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$$
$$\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2x\cdot\frac{1}{x}+a\left(x+\frac{1}{x}\right)+b=0$$

$z=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと

$$\boldsymbol{z^2+az+b-2=0} \qquad \cdots\cdots (\star\star) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) $f(z)=z^2+az+b-2$ とおく．
$y=f(z)$ のグラフは下に凸であり，

$$f(0)=b-2<0 \qquad (\because\ b<2)$$

であるから，正と負の実数解を 1 つずつもつ．
さらに，$|2a|-2<b$ より

$$f(-2)=-2a+b+2>-2a+(|2a|-2)+2=|2a|-2a \geqq 0$$
$$f(2)=2a+b+2>2a+(|2a|-2)+2=|2a|+2a \geqq 0$$

であるから，$-2<z<0$，$0<z<2$ の範囲に実数解を 1 つずつもつ．

よって，z の方程式 $(\star\star)$ の解はすべて絶対値が 2 以下の (実は $|z|<2$ を満たす正と負の) 実数である． $\cdots\cdots$(証明終わり)

- $f(z)=z^2+az+b-2=\left(z+\dfrac{a}{2}\right)^2+b-2-\dfrac{a^2}{4}$
  軸の方程式は $x=-\dfrac{a}{2}$ である．ここで，$|2a|-2<b<2$ より

  $$|2a|-2<2 \iff -2<a<2$$

  これより軸の位置は

  $$-1<-\frac{a}{2}<1$$

  であり，頂点の y 座標の符号は

  $$f\left(-\frac{a}{2}\right)=b-2-\frac{a^2}{4}<2-2-\frac{a^2}{4}=-\frac{a^2}{4} \leqq 0$$

$\longleftarrow$ 問題文で $x \fallingdotseq 0$ は仮定されているが，証明できる事柄である．

$\longleftarrow$ 誘導がないときもあるので，$t=x+\dfrac{1}{x}$ の置き換えは覚えておくとよい．
チェクリピ 54

$\longleftarrow$ $z=0$ を代入したのはたまたまの話であり，$-2 \leqq z \leqq 2$ の範囲で $f(z)<0$ となる z なら何でもよい．

$\longleftarrow$ 解の配置の問題であり，定番通り

$$\begin{cases} \text{判別式 (頂点の } y \text{ 座標の符号)} \\ \text{軸の位置} \\ \text{端点の符号} \end{cases}$$

を調べるとよい．
チェクリピ 解の配置

さらに，$f(-2)>0$ かつ $f(2)>0$ であることをあわせると，
z の方程式 $(\star\star)$ の解はすべて絶対値が 2 以下の実数である．

(3) z の 2 次方程式 $(\star\star)$ の実数解 z は $z=x+\dfrac{1}{x}$ を満たす．

$$x^2-zx+1=0 \qquad \cdots\cdots ①$$

判別式を D とおくと

$$D=z^2-4 \leqq 0 \quad (\because\ (2) \text{ より } |z| \leqq 2)$$

$f(\pm 2)>0$ より $|z| \fallingdotseq 2$ であり，$D<0$ である．
これより，①の解，すなわち，$(\star)$ の解はすべて虚数であり

$$x=\frac{z_1 \pm \sqrt{4-{z_1}^2}\,i}{2}$$

← $D \leqq 0$ でもこの式は使えるが，x が「虚数」であることをいわなければならないので $D \fallingdotseq 0$ が必要．

である．この複素数の大きさは

$$\sqrt{\left(\frac{z_1}{2}\right)^2+\left(\pm\frac{\sqrt{4-{z_1}^2}}{2}\right)^2}=\sqrt{\frac{{z_1}^2}{4}+\frac{4-{z_1}^2}{4}}=1$$

以上より，4 次方程式 $(\star)$ の解はすべて虚数で，それらの大きさはすべて 1 である． ……(証明終わり)