k を実数とする．3 次式 $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$ に対し，方程式 $f(x) = 0$ の 3 つの解を α, β, γ とする．$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x) = 0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$, $\beta\gamma$, $\gamma\alpha$ であるものとする．

(1) $g(x)$ を k を用いて表せ．
(2) 2 つの方程式 $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ．

(13 東北大 理系 1)

【答】

(1) $g(x) = x^3 + kx - 1$
(2) $k = 0,\ -2$

【チェック・チェック】

(1) 3 次方程式の解と係数の関係を使います．方程式が与えられたときの解と係数の関係，解が与えられたときの解と係数の関係がセットになった設問です．
(2) 共通解とは 2 式をともに満たす x のことですから，2 式を連立したときの解のことです．

【解答】

$\boxed{1}$ (1) $f(x) = x^3 - kx^2 - 1$

α，β，γ は方程式 $f(x) = 0$ の解であるから，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = k \\ \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = 0 \\ \alpha\beta\gamma = 1 \end{cases} \quad \cdots\cdots (*)$$

⟵ 3 次方程式の解と係数の関係

である．$g(x)$ は x^3 の係数が 1 の 3 次式で，$\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ は方程式 $g(x) = 0$ の解であるから

$$\begin{aligned} g(x) &= (x - \alpha\beta)(x - \beta\gamma)(x - \gamma\alpha) \\ &= x^3 - (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x^2 \\ &\qquad + \alpha\beta\gamma(\beta + \gamma + \alpha)x - \alpha^2\beta^2\gamma^2 \end{aligned}$$

⟵ 因数定理

$(*)$ を代入すると

$$\boldsymbol{g(x) = x^3 + kx - 1} \quad \cdots\cdots (答)$$

(2) $f(x) = 0$ と $g(x) = 0$ が共通解をもつ，すなわち，

⟵ 共通解とは連立方程式の解のことである．

$$x^3 - kx^2 - 1 = 0 \quad \cdots\cdots ①$$
$$x^3 + kx - 1 = 0 \quad \cdots\cdots ②$$

を同時に満たす x が存在するための条件は，① − ② より

$$-k(x^2 + x) = 0$$

であることが必要である．このとき，

⟵ 必要条件であることに注意せよ．

$$k = 0 \text{ または 共通解 } x \text{ は } x = 0,\ -1$$

である．

$k = 0$ のとき，①，② はともに $x^3 - 1 = 0$ であり，解はすべて共通解であり，条件を満たす．

$x = 0$ は ①，② のどちらの解でもない．したがって，条件を満たさない．

⟵ $x = 0$ は共通解をもつための必要条件であるが十分条件ではない．

$x = -1$ のとき，①，② のどちらも

$$-k - 2 = 0$$

となるから，$k = -2$ のとき，共通解 $x = -1$ をもち，条件を満たす．

以上より，求める k の値は

$$\boldsymbol{k = 0,\ -2} \quad \cdots\cdots (答)$$