実数 a, x, y, z が

$$\begin{cases} x+y+z=a \\ x^2+y^2+z^2=a^2-2a+14 \\ x^3+y^3+z^3=a^3-3a^2+3a+18 \end{cases}$$

を満たすとき，次の問いに答えよ．

(1) $xy+yz+zx$ および xyz を a の式で表せ．

(2) x, y, z のうち少なくとも 2 つが等しいとき， a, x, y, z を求めよ．

(13 横浜国大 経済 1)

(1) $xy+yz+zx=a-7$, $xyz=-6a+6$

(2) $(a,\ x,\ y,\ z)$

$=(4,\ 3,\ 3,\ -2)$, $(4,\ 3,\ -2,\ 3)$,

$(4,\ -2,\ 3,\ 3)$, $(-1,\ 3,\ -2,\ -2)$,

$(-1,\ -2,\ ,\ 3,\ -2)$, $(-1,\ -2,\ -2,\ 3)$

【チェック・チェック】

(1) 与えられた式を含む等式として

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$
$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

があります．第 2 式は教科書では扱われていませんが，どちらも覚えておくべき等式です．

(2) x，y，z が $at^3+bt^2+ct+d=0$ $(a \neq 0)$ の解である $\iff \begin{cases} x+y+z = -\dfrac{b}{a} \\ xy+yz+zx = \dfrac{c}{a} \\ xyz = -\dfrac{d}{a} \end{cases}$

2 つの条件は同値であり，右から左へ見ると， x，y，z についての連立方程式が 3 次方程式に言い換えられることを意味しています．

【解答】

(1) 与えられた条件は

$$\begin{cases} x+y+z=a & \cdots\cdots ① \\ x^2+y^2+z^2 = a^2-2a+14 & \cdots\cdots ② \\ x^3+y^3+z^3 = a^3-3a^2+3a+18 & \cdots\cdots ③ \end{cases}$$

等式

$$(x+y+z)^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx)$$

← 3 文字の 2 次の等式

に①，②を代入すると

$$a^2 = (a^2-2a+14)+2(xy+yz+zx)$$
$$\therefore \quad xy+yz+zx = \boldsymbol{a-7} \quad \cdots\cdots ④ \qquad \cdots\cdots(答)$$

さらに，等式

$$x^3+y^3+z^3-3xyz = (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)$$

← 3 文字の 3 次の等式

に①，②，③，④を代入すると

$$(a^3-3a^2+3a+18)-3xyz = a\left\{(a^2-2a+14)-(a-7)\right\}$$
$$3xyz = (a^3-3a^2+3a+18)-(a^3-3a^2+21a)$$
$$xyz = \boldsymbol{-6a+6} \quad \cdots\cdots ⑤ \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) ①，④，⑤より，x，y，z は 3 次方程式

$$t^3-at^2+(a-7)t-(-6a+6)=0$$

← 3 次方程式の解と係数の関係
チェクリピ 57

の解である．

$$-(t^2-t-6)a+t^3-7t-6=0$$
$$-(t-3)(t+2)a+(t+1)(t+2)(t-3)=0$$
$$(t-3)(t+2)(t+1-a)=0 \quad \cdots\cdots ⑥$$
$$\therefore \quad t=3,\ -2,\ a-1$$

x，y，z のうち少なくとも 2 つが等しくなるのは

$$a-1=3 \text{ または } a-1=-2$$

すなわち

$$a=4 \text{ または } a=-1$$

のときである．

$a=4$ のとき，⑥の解は　3 (重解)，-2

$a=-1$ のとき，⑥の解は　3，-2 (重解)

　よって，

$$
\begin{aligned}
&(a,\ x,\ y,\ z)\\
=&\boldsymbol{(4,\ 3,\ 3,\ -2),\ (4,\ 3,\ -2,\ 3),\ (4,\ -2,\ 3,\ 3),}\\
&\boldsymbol{(-1,\ 3,\ -2,\ -2),\ (-1,\ -2,\ ,\ 3,\ -2),}\\
&\boldsymbol{(-1,\ -2,\ -2,\ 3)} \quad \cdots\cdots(\text{答})
\end{aligned}
$$