次の連立方程式を解け.

$$\begin{cases} x^2 - 2y = 8 \\ y^2 - 2x = 8 \end{cases}$$

(13 群馬大 社会情報)

【答】 $(x,\ y) = (4,\ 4),\ (-2,\ -2),\ \left(-1+\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5}\right),\ \left(-1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}\right)$

【チェック・チェック】

一文字消去の代入法で出発すると 4 次方程式を解くことになります.

①かつ ② のセットは x, y を入れ替えても連立方程式としては同じものです．この対称性に着目して ①＋②, ①－② をつくるとそれぞれ対称式，交代式となり扱いやすくなります.

【解答】

$$\begin{cases} x^2-2y=8 & \cdots\cdots ① \\ y^2-2x=8 & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

①＋② より

$$x^2+y^2-2(x+y)=16$$

$$(x+y)^2-2xy-2(x+y)=16 \qquad \cdots\cdots ③$$

← 対称式

①－② より

$$x^2-y^2+2(x-y)=0$$

$$(x-y)(x+y+2)=0 \qquad \cdots\cdots ④$$

← 交代式

④より

$$x-y=0 \text{ または } x+y+2=0$$

(i) $y=x$ のとき

$$③ \iff 4x^2-2x^2-4x=16$$

$$x^2-2x-8=0$$

$$(x-4)(x+2)=0 \qquad \therefore \quad x=4,\ -2$$

$$(x,\ y)=(4,\ 4),\ (-2,\ -2)$$

(ii) $x+y+2=0$ のとき

$$③ \iff (-2)^2-2xy-2(-2)=16$$

$$xy=-4$$

$\begin{cases} x+y=-2 \\ xy=-4 \end{cases}$ より x, y は 2 次方程式 $t^2+2t-4=0$ の解である.

← 2 次方程式の解と係数の関係
チェクリピ 52

$$t=-1\pm\sqrt{5}$$

$$(x,\ y)=\left(-1+\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5}\right),\ \left(-1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}\right)$$

以上，(i)，(ii) より，求める解は

$$(x,\ y)=\mathbf{(4,\ 4),\ (-2,\ -2),\ \left(-1+\sqrt{5},\ -1-\sqrt{5}\right),}$$
$$\mathbf{\left(-1-\sqrt{5},\ -1+\sqrt{5}\right)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

- 解答は $\{①,\ ②\} \iff \{③,\ ④\}$ と加減法を用いて変形し，同値な連立方程式 $\{③,\ ④\}$ を解いている．③は対称式，④は交代式なので扱いやすい.
- $\{①,\ ②\} \iff \{①,\ ④\}$ として，④ から得られる「$y=x$

または $y=-x-2$」を ① に代入して

$$\begin{cases} y=x \\ x^2-2x=8 \end{cases} \quad \text{または} \quad \begin{cases} y=-x-2 \\ x^2-2(-x-2)=8 \end{cases}$$

を解いてもよい.

- $\{①,\ ②\} \iff \begin{cases} y=\dfrac{x^2-8}{2} \\ \left(\dfrac{x^2-8}{2}\right)^2-2x=8 \end{cases}$ として代入法で出発すると，4 次方程式

$$x^4-16x^2-8x+32=0$$
$$(x+2)(x-4)(x^2+2x-4)=0$$

を解くことになる (得策ではない).