p，q を実数の定数とし，3 次方程式

$$x^3 + px + q = 0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

を考える．$(*)$ が複素数 $2+\sqrt{3}\,i$ を解に持つならば，$p=$ $\boxed{\text{ア}}$ である．また，$(*)$ が 2 重解を持ち，p，q が $p+q=-1$ を満たすならば，$p=$ $\boxed{\text{イ}}$ または $\boxed{\text{ウ}}$ である．ただし，$\boxed{\text{イ}} < \boxed{\text{ウ}}$ とする．

(13 関西学院大 理工 2 月 3 日 [1](1))

【答】

ア	イ	ウ
-9	-3	$-\frac{3}{4}$

【チェック・チェック】

実数係数の方程式 $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+a_1x+a_0=0$ において，虚数解 α が解ならば，その共役複素数 $\overline{\alpha}$ も解です．すなわち，

$$f(\alpha)=0 \Longrightarrow f(\overline{\alpha})=0$$

です．方程式の係数がすべて実数であることに注意しましょう．

また，3 次方程式の解と係数の関係も使えるようにしておきましょう．

$$\alpha,\ \beta,\ \gamma \text{ が } ax^3+bx^2+cx+d=0 \text{ の解である}$$
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} \alpha+\beta+\gamma=-\dfrac{b}{a} \\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\dfrac{c}{a} \\ \alpha\beta\gamma=-\dfrac{d}{a} \end{cases}$$

同値な関係にあることに注意しましょう

【解答】

$$x^3+px+q=0 \qquad \cdots\cdots (*)$$

$(*)$ は実数を係数とする 3 次方程式であるから，$\alpha=2+\sqrt{3}\,i$ が解ならば，共役複素数の $\overline{\alpha}=2-\sqrt{3}\,i$ も解である．残りの解を β とすると，解と係数の関係より

$\longleftarrow$ 共役も解になるのは，実数係数の方程式であることが前提です．

$$\begin{cases} \alpha+\overline{\alpha}+\beta=0 \\ \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\beta\alpha=p \\ \alpha\overline{\alpha}\beta=-q \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} 4+\beta=0 \\ 7+4\beta=p \\ 7\beta=-q \end{cases}$$

$\longleftarrow$ 教科書では
$f(\alpha)=\cdots$
$=(\text{実部})+(\text{虚部})i=0$
と変形し，連立方程式
$\begin{cases}(\text{実部})=0 \\ (\text{虚部})=0\end{cases}$
を解いている．

$$\therefore \quad \beta=-4,\ p=\underset{ア}{\boxed{-9}},\ q=28$$

また，$(*)$ の 2 重解を γ，残りの解を δ とすると，解と係数の関係より

$$\begin{cases} \gamma+\gamma+\delta=0 \\ \gamma^2+\gamma\delta+\delta\gamma=p \\ \gamma^2\delta=-q \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \delta=-2\gamma \\ p=-3\gamma^2 \\ q=2\gamma^3 \end{cases}$$

$p+q=-1$ より

$$-3\gamma^2+2\gamma^3=-1 \qquad 2\gamma^3-3\gamma^2+1=0$$
$$(\gamma-1)^2(2\gamma+1)=0 \qquad \therefore \quad \gamma=1,\ -\frac{1}{2}$$

$\longleftarrow$ 因数定理を利用して因数分解する．

よって，

$$(\gamma,\ \delta,\ p,\ q)=\left(1,\ -2,\ \underset{イ}{\boxed{-3}},\ 2\right)$$
$$\text{または}\left(-\frac{1}{2},\ 1,\ \underset{ウ}{\boxed{-\frac{3}{4}}},\ -\frac{1}{4}\right)$$