関数 $f(x) = -\dfrac{5}{2}x(x-1)$ を考える．a を実数とし，実数 b, c を $b = f(a)$, $c = f(b)$ により定める．

(1) 不等式 $a < b$ を満たすような a の値の範囲を求めよ．

(2) 連立不等式

$$(*)\begin{cases} a < b \\ b > c \end{cases}$$

を満たすような a の値の範囲を求めよ．

(3) (2) の連立不等式 $(*)$ が成り立つとき，c と $f(c)$ の大小を判定せよ．

(13 京都工繊大 工芸科 2)

(1) $0 < a < \dfrac{3}{5}$

(2) $\dfrac{2}{5} < a < \dfrac{3}{5}$

(3) $c < f(c)$

【チェック・チェック】

2 次不等式に関する問題です．$b=f(a)$，$c=f(b)=f(f(a))$ といった合成関数になっていますが，4 次関数 $f(f(x))$ を求めるようなことは避けたいものです．

【解答】

$$f(x)=-\frac{5}{2}x(x-1)$$

(1) $b=f(a)$ より

$$a<b \iff a<f(a) \iff a<-\frac{5}{2}a(a-1)$$
$$\iff a(5a-3)<0$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{0<a<\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) (1) および $c=f(b)$ より

$$(*)\begin{cases} a<b \\ b>c \end{cases} \iff \begin{cases} 0<a<\dfrac{3}{5} & \cdots\cdots ① \\ b>f(b) & \cdots\cdots ② \end{cases}$$

ここで，(1) の変形を参考にすると

$$② \iff b(5b-3)>0$$

$$\therefore\quad b<0 \text{ または } \frac{3}{5}<b$$

← (1) の a を b とみて，不等号を逆向きにする．

①のとき，$b=f(a)>0$ より，$b<0$ は不適．

← 「①かつ $b<0$」を解いてもよいが，「解なし」となるのは明白．

$$b>\frac{3}{5} \iff -\frac{5}{2}a(a-1)>\frac{3}{5}$$
$$\iff (5a-2)(5a-3)<0$$

$$\therefore\quad \frac{2}{5}<a<\frac{3}{5}$$

よって，①かつ ② を満たす a の値の範囲は

$$\boldsymbol{\frac{2}{5}<a<\frac{3}{5}} \qquad \cdots\cdots ③ \qquad \cdots\cdots(答)$$

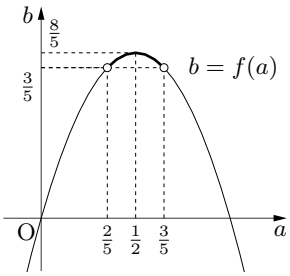
(3)
$$f(c)-c=-\frac{5}{2}c(c-1)-c=-\frac{5}{2}c^2+\frac{3}{2}c$$
$$=-\frac{5}{2}c\left(c-\frac{3}{5}\right)$$

← $f(c)-c$ の符号を調べて，$f(c)$ と c の大小を決める．

c の変域を調べる．

a は③の範囲で動き

$$b=f(a)=-\frac{5}{2}a(a-1)$$
$$=-\frac{5}{2}\left(a-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{5}{8}$$
$$f\left(\frac{2}{5}\right)=f\left(\frac{3}{5}\right)\left(=\frac{3}{5}\right)$$



であるから

$$f\left(\frac{2}{5}\right)<b\leqq f\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore\quad \frac{3}{5}<b\leqq\frac{5}{8} \qquad \cdots\cdots ④$$

← a を動かしたときの，b の変域を求めた．

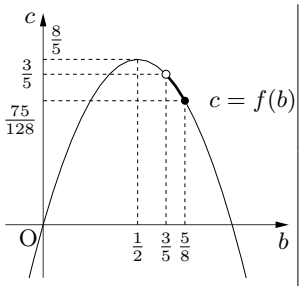
つぎに

$$c = f(b)$$
$$= -\frac{5}{2}\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{5}{8}$$

は④の範囲で単調減少より

$$f\left(\frac{3}{5}\right) > c \geqq f\left(\frac{5}{8}\right)$$

$$\therefore \quad \frac{75}{128} \leqq c < \frac{3}{5} \quad \cdots\cdots ⑤$$



⟵ b を動かしたときの，c の変域を求めた．

⑤のとき

$$f(c) - c = -\frac{5}{2}c\left(c - \frac{3}{5}\right) > 0$$

よって，$\boldsymbol{c < f(c)}$ である．　……(答)