以下の問いに答えよ．

(1) $a>0,\ b>0$ とする．$a \fallingdotseq b$ であるための必要十分条件は，

$$\frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

であることを示せ．

(2) $a>0,\ b>0,\ a \fallingdotseq b$ とする．

$$p = a+b-\sqrt{ab}, \quad q = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{\sqrt{ab}}$$

とおくとき，$pq>1$ であることを示せ．ただし，必要があれば，(1) の結果を用いてよい．

(3) $a>0,\ b>0,\ ab>1$ とする．x の 2 次方程式

$$x^2 - \left(a+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)x + \frac{a}{b} = 0$$

は，相異なる 2 つの正の実数解をもつことを示せ．

(13 宮城教大 中等 (数) 1)

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【チェック・チェック】

(1) 相加平均・相乗平均の関係における等号成立条件を訊ねています．

(2) (1) の利用を考えます．

(3) 2 次方程式の解の配置の問題です．数学 I の範囲ならグラフを利用するでしょう．数学 II での解と係数の関係を使う解法もあります．解の正負の判定なので解と係数の関係を使ってみましょう．

【解答】

(1) まず，$a>0,\ b>0$ より $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ である．このとき

$$\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}=\frac{(\sqrt{a})^2+(\sqrt{b})^2-2\sqrt{a}\sqrt{b}}{2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

である．

$a \fallingdotseq b$ ならば，$(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \fallingdotseq 0$ である．また，$\sqrt{a}-\sqrt{b}$ は実数より $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 \geqq 0$ である．したがって，① より，$\dfrac{a+b}{2}-\sqrt{ab}>0$ は成り立つ．

逆に，$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ が成り立つならば，① より

$$\frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2}>0$$

だから，$a \fallingdotseq b$ である．

よって，$a \fallingdotseq b$ であるための必要十分条件は，$\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ である． ……(証明終わり)

← $a>0,\ b>0$ ならば $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ はつねに成り立つ．$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$ が成り立たない例としては $a=b=-1$ などがある．

← $a \fallingdotseq b$ であるための $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ は必要条件である．

← $a \fallingdotseq b$ であるための $\dfrac{a+b}{2}>\sqrt{ab}$ は十分条件である．

(2) $a \fallingdotseq b$ であるから，$a,\ b$ および $\dfrac{1}{a},\ \dfrac{1}{b}$ に対して (1) の不等式を用いると

$$pq=\left(a+b-\sqrt{ab}\right)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$$
$$>\left(2\sqrt{ab}-\sqrt{ab}\right)\left(2\sqrt{\frac{1}{a}\frac{1}{b}}-\frac{1}{\sqrt{ab}}\right)$$
$$=\sqrt{ab}\cdot\frac{1}{\sqrt{ab}}$$
$$=1$$

よって，$pq>1$ が成り立つ． ……(証明終わり)

(3) $f(x)=x^2-\left(a+\sqrt{\dfrac{a}{b}}\right)x+\dfrac{a}{b}$ とおく．2 次方程式 $f(x)=0$ の判別式を D とすると，$a>0,\ b>0,\ ab>1$ より

$$D=\left(a+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-4\cdot\frac{a}{b}$$
$$=\left(a+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2-\left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^2$$

← 2 次方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの正の実数解 $\alpha,\ \beta$ をもつ条件は

$$\begin{cases}\text{判別式}: D>0\\ \alpha+\beta>0\\ \alpha\beta>0\end{cases}$$

$$= \left(a+3\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\left(a-\sqrt{\frac{a}{b}}\right)$$
$$= \left(a+3\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\cdot\sqrt{\frac{a}{b}}\left(\sqrt{ab}-1\right)$$
$$> 0$$

　よって，$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α, β をもつ．さらに，解と係数の関係より

$$\alpha+\beta = a+\sqrt{\frac{a}{b}} > 0 \text{ かつ } \alpha\beta = \frac{a}{b} > 0$$

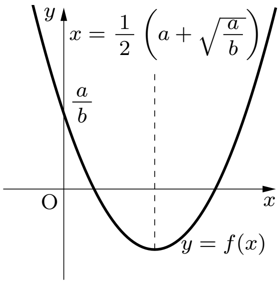
であるから，α, β はともに正である．

　よって，$f(x)=0$ は相異なる 2 つの正の実数解をもつ．

…… (証明終わり)

- 解の配置の問題は $y=f(x)$ のグラフと x 軸との交点としてとらえてもよい．

  　$y=f(x)$ のグラフは下に凸であり，軸の方程式は $x=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{\frac{a}{b}}\right)\ (>0)$，端点の符号 : $f(0)=\frac{a}{b}>0$ である．これらと $f(x)=0$ の判別式 $D>0$ をあわせると，$f(x)=0$ は相異なる 2 つの正の実数解をもつことがわかる．



⟵ チェクリピ 96