$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数である．次の問いに答えよ．

(1) 不等式 $(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$ が成り立つことを証明せよ．

(2) (1) において等号が成り立つのはどのようなときかを示せ．

(3) $a^2+b^2+c^2=25,\ x^2+y^2+z^2=36,\ ax+by+cz=30$ のとき，$\dfrac{a+b+c}{x+y+z}$ の値を求めよ．

(13 秋田大 教育文化 2)

(1) 略

(2) $a:b:c=x:y:z$

(3) $\dfrac{5}{6}$

【チェック・チェック】

(1) はコーシー・シュワルツの不等式とよばれています．等号成立条件も含めて覚えておくとよいでしょう．証明は (左辺) − (右辺) $\geqq 0$ を示せばよいのですが，ベクトルの内積にもち込むこともできます．

(3) は (1)，(2) との関係を探ります．

【解答】

(1) (左辺) − (右辺) を整理する．

$$
\begin{aligned}
&(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)-(ax+by+cz)^2 \\
=&a^2x^2+a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2y^2+b^2z^2 \\
&+c^2x^2+c^2y^2+c^2z^2 \\
&-(a^2x^2+b^2y^2+c^2z^2+2abxy+2bcyz+2cazx) \\
=&a^2y^2+a^2z^2+b^2x^2+b^2z^2+c^2x^2+c^2y^2 \\
&-(2abxy+2bcyz+2cazx) \\
=&(a^2y^2-2abxy+b^2x^2)+(b^2z^2-2bcyz+c^2y^2) \\
&+(c^2x^2-2cazx+a^2z^2) \\
=&(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2
\end{aligned}
$$

← (左辺)-(右辺)

← $(\quad)^2$ を目標に項を組み合わる

ここで，a，b，c，x，y，z はすべて実数より

$$(ay-bx)^2 \geqq 0,\ (bz-cy)^2 \geqq 0,\ (cx-az)^2 \geqq 0$$

← (実数)$^2 \geqq 0$

であり，

$$(ay-bx)^2+(bz-cy)^2+(cx-az)^2 \geqq 0 \qquad \cdots\cdots ①$$

よって

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2) \geqq (ax+by+cz)^2$$

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) ① の等号が成り立つのは，

$$(ay-bx)^2=0 \text{ かつ } (bz-cy)^2=0 \text{ かつ } (cx-az)^2=0$$

$$\therefore\quad ay-bx=0 \text{ かつ } bz-cy=0 \text{ かつ } cx-az=0$$

のときである．a，b，c，x，y，z はすべて正の実数より

$$\frac{a}{b}=\frac{x}{y} \text{ かつ } \frac{b}{c}=\frac{y}{z} \text{ かつ } \frac{c}{a}=\frac{z}{x}$$

すなわち，(1) において等号が成り立つのは

$$\boldsymbol{a:b:c=x:y:z} \qquad \cdots\cdots (答)$$

のときである．

← $ay-bx=0$
$\iff ay=bx$
$\iff a:b=x:y$

(3) $a^2+b^2+c^2=25$，$x^2+y^2+z^2=36$，$ax+by+cz=30$ のとき，

$$(a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)=25\cdot 36=(5\cdot 6)^2=30^2$$

$$(ax+by+cz)^2=30^2$$

であり，これは (1) において等号が成り立つ場合である．

したがって，(2) より

$$a = kx,\ b = ky,\ c = kz$$

とおくことができて，$a,\ b,\ c,\ x,\ y,\ z$ はすべて正の実数より，k は正の実数である．

$a^2 + b^2 + c^2 = 25$ より

$$(kx)^2 + (ky)^2 + (kz)^2 = 25$$

$$k^2 = \frac{25}{x^2 + y^2 + z^2} = \frac{25}{36} = \left(\frac{5}{6}\right)^2$$

$$\therefore \quad k = \frac{5}{6}\ (> 0)$$

よって

$$\frac{a+b+c}{x+y+z} = \frac{kx+ky+ky}{x+y+z} = k = \boldsymbol{\frac{5}{6}} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- (1) の不等式はコーシー・シュワルツの不等式とよばれるもので内積に関係した不等式である．

← (1) の右辺の積の和 $ax+by+cz$ はベクトルの内積である

2 つのベクトル $\vec{a} = (a,\ b,\ c)$，$\vec{x} = (x,\ y,\ z)$ を考える．$\vec{a}$，$\vec{x}$ のなす角を θ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると

$$\begin{aligned} & ax + by + cz \\ =& \vec{a} \cdot \vec{x} \\ =& |\vec{a}||\vec{x}|\cos\theta \\ =& \sqrt{a^2+b^2+c^2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cos\theta \end{aligned}$$

両辺を 2 乗して

$$(ax+by+cz)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)\cos^2\theta$$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ のとき，$0 \leqq \cos^2\theta \leqq 1$ であるから

$$(ax+by+cz)^2 \leqq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$$

である．等号が成り立つのは

$$\begin{aligned} \cos^2\theta = 1 &\iff \theta = 0,\ \pi \iff \vec{a} \mathbin{/\!/} \vec{x} \\ &\iff a : b : c = x : y : z \end{aligned}$$

← チェクリピ 361