$a,\ b$ を正の整数とする．このとき，関数

$$y = \left| x^2 - ax + \frac{a^2}{2} - 5 \right|$$

のグラフと直線 $y = b$ との共有点を考える．

(1) 共有点が 3 個になるような $(a,\ b)$ の組をすべて求めよ．

(2) 共有点が 1 個になるような $(a,\ b)$ の組のうち，b が最小になるものを求めよ．

(13 千葉大 1)

【答】

(1) $(a,\ b) = (2,\ 4),\ (4,\ 1)$

(2) $(a,\ b) = (6,\ 4)$

【チェック・チェック】

絶対値がついた 2 次関数のグラフと x 軸に平行な直線との共有点の個数に関する問題でグラフが x に関して折れるか折れないか，すなわち，2 次関数のグラフの頂点の y 座標の符号で場合分けすることになる．まずは平方完成してグラフをかいてみることである．

整数に関する考察もあるがこの程度の処理はできるようにしたいものである．

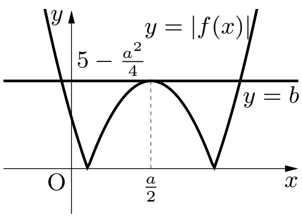
【解答】

$f(x) = x^2 - ax + \dfrac{a^2}{2} - 5$ とおくと

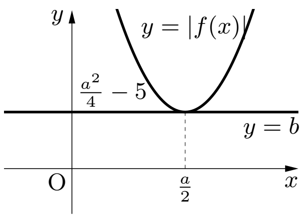
$$f(x) = \left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \frac{a^2}{4} - 5$$

であり，$y = |f(x)|$ のグラフは下図となる．

$\longleftarrow$ 平方完成して，頂点の y 座標をおさえる



(i) $\dfrac{a^2}{4} - 5 \leqq 0$ のとき



(ii) $\dfrac{a^2}{4} - 5 \geqq 0$ のとき

$\longleftarrow$ 頂点の y 座標の符号で場合分けしている

(1) $y = |f(x)|$ のグラフと直線 $y = b$ との共有点が 3 個となるのは，(i) のときである．

$\longleftarrow$ 直線 $y = b$ が折れた頂点で接するときである

$a > 0$ とあわせると $0 < a \leqq 2\sqrt{5}$ のときであり

$$b = 5 - \frac{a^2}{4}$$

である．a，b は整数より，$\dfrac{a^2}{4}$ は整数であり，a は偶数である．

$4 < 2\sqrt{5} < 5$ より $a = 2,\ 4$ である．

$\longleftarrow$ a は $0 < a \leqq 4$ の範囲にある偶数である

よって，　$\boldsymbol{(a,\ b) = (2,\ 4),\ (4,\ 1)}$ ……(答)

(2) $y = |f(x)|$ のグラフと直線 $y = b$ との共有点が 1 個となるのは，(ii) のときである．

$\longleftarrow$ 直線 $y = b$ が頂点で接するときである

$a > 0$ とあわせると $a \geqq 2\sqrt{5}$ のときであり

$$b = \frac{a^2}{4} - 5$$

である．a，b は整数より，$\dfrac{a^2}{4}$ は整数であり，a は偶数である．

$4 < 2\sqrt{5} < 5$ より，b が最小となるのは $a = 6$ のときである．

$\longleftarrow$ a は $5 \leqq a$ の範囲にある最小な偶数である

よって，　$\boldsymbol{(a,\ b) = (6,\ 4)}$ ……(答)