(1) 正の実数 $x$, $y$, $z$ が $x^2 = y^2 + z$ を満たすとき，$y < x < y + \dfrac{z}{2y}$ が成り立つことを示せ.

(2) $x^2 = y^2 + 8\sqrt{2y - 1}$ を満たす正の整数 $x$, $y$ の組をすべて求めよ.

(13 一橋大 後期 経済 1)

(1) 略

(2) $(x,\ y) = (3,\ 1),\ (7,\ 5)$

# 【チェック・チェック】

(1) は不等式を 2 つに分けて証明すればよいでしょう．平方したり，差をとったりしてみましょう．

(2) は (1) との関係を探ります．$8\sqrt{2y-1}$ が正の実数なら (1) の仮定を満たすことになり，$x$ と $y$ に関する不等式を得ることになります．このあとは $x$, $y$ が整数という条件から値を絞っていきます.

---

【解答】

(1) $z>0$ かつ $x^2=y^2+z$ より

$$x^2=y^2+z>y^2 \qquad \therefore \quad x^2>y^2$$

$x>0,\ y>0$ より　　$x>y$　　$\cdots\cdots$ ①

← $y<x$ と $x<y+\dfrac{z}{2y}$ に分けて証明する.

次に，

$$\left(y+\frac{z}{2y}\right)-x=\frac{2y^2+(x^2-y^2)-2xy}{2y}=\frac{(x-y)^2}{2y}$$

① かつ $y>0$ より

$$\left(y+\frac{z}{2y}\right)-x>0 \qquad \therefore \quad y+\frac{z}{2y}>x \qquad \cdots\cdots ②$$

①かつ②より

$$y<x<y+\frac{z}{2y}$$

が成り立つ.　　　　$\cdots\cdots$ (証明終わり)

(2) $x^2=y^2+8\sqrt{2y-1}$ $\cdots\cdots$ $(*)$ を満たす正の整数 $x$, $y$ を求めるのだから，$y\geqq 1$ としてよい．このとき，$8\sqrt{2y-1}>0$ であり，$z=8\sqrt{2y-1}$ として (1) の不等式を用いると

← (1) の利用を考える.

$$y<x<y+\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y}$$

← $x$ が $y$ の式ではさまれた関係式になっている.

ここで

$$\frac{8\sqrt{2y-1}}{2y}=4\sqrt{\frac{2}{y}-\frac{1}{y^2}}=4\sqrt{-\left(\frac{1}{y}-1\right)^2+1}\leqq 4$$

より

$$y<x<y+4$$

$x$, $y$ は正の整数より

$$x=y+1,\ y+2,\ y+3 \qquad \cdots\cdots ③$$

← $x$ が絞り込まれた.

である.

一方，③より $x>y$ $(\geqq 1)$ であり，かつ $(*)$ より

$$x^2-y^2=8\sqrt{2y-1}$$

$$\iff \begin{cases}(x^2-y^2)^2=64(2y-1)\\ x^2-y^2\geqq 0 \text{ (これはつねに成立する)}\end{cases}$$

$$\iff (x^2-y^2)^2=64(2y-1)$$

右辺が偶数であるから

$$
\begin{aligned}
&(x^2-y^2)^2 \text{ は偶数である} \\
\iff & x^2-y^2 \text{ は偶数である} \\
\iff & x^2,\ y^2 \text{の偶奇は一致する} \\
\iff & x,\ y \text{の偶奇は一致する} \\
\iff & x-y \text{ は偶数である}
\end{aligned}
$$

← $x$ と $y$ の関係を調べてみよう．

③のうち，$x-y=(\text{偶数})$ を満たすのは

$$x=y+2$$

のみである．

← $x$ が 1 つに絞り込まれた．

$$
\begin{aligned}
&(y+2)^2-y^2=64(2y-1) \\
&y^2-6y+5=0 \\
&(y-1)(y-5)=0 \\
&\therefore\quad y=1,\ 5
\end{aligned}
$$

よって，$\quad (x,\ y)=\mathbf{(3,\ 1),\ (7,\ 5)}$ ……(答)

- $x=y+1,\ y+2,\ y+3$ を $(*)$ に代入して解 $x,\ y$ を調べてもよい．

← こちらの解法の方が実戦的でしょう．

(i) $x=y+1$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(y+1)^2=y^2+8\sqrt{2y-1} \\
\iff & 2y+1=8\sqrt{2y-1} \\
\iff & \begin{cases}(2y+1)^2=64(2y-1) \\ 2y+1 \geqq 0\ (y \geqq 1 \text{ よりつねに成立する})\end{cases} \\
\iff & 4y^2-124y+65=0
\end{aligned}
$$

$$y=\frac{62\pm\sqrt{62^2-4\cdot 65}}{4}=\frac{31\pm 8\sqrt{14}}{2}$$

これは $y$ が整数であることに反する．

(ii) $x=y+2$ のとき

解答の中で処理済み．

(iii) $x=y+3$ のとき

$$
\begin{aligned}
&(y+3)^2=y^2+8\sqrt{2y-1} \\
\iff & 6y+9=8\sqrt{2y-1} \\
\iff & \begin{cases}(6y+9)^2=64(2y-1) \\ 6y+9 \geqq 0\ (y \geqq 1 \text{ よりつねに成立する})\end{cases} \\
\iff & 36y^2-20y+145=0
\end{aligned}
$$

$$(\text{判別式})/4=10^2-36\cdot 145<0$$

$y$ は虚数であり，不適．

以上，(i)，(ii)，(iii) より $\quad (x,\ y)=(3,\ 1),\ (7,\ 5)$