$3p^3 - p^2q - pq^2 + 3q^3 = 2013$ を満たす正の整数 $p,\ q$ の組をすべて求めよ.

(13 一橋大 1)

$(p,\ q) = (2,\ 9),\ (9,\ 2)$

【チェック・チェック】

左辺を因数分解し，2013 の約数と比較します．

与えられた式は対称式なので $u=p+q,\ v=pq$ とおくと式が扱いやすくなります．

【解答】

$$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$$

$$3\{(p+q)^3-3pq(p+q)\}-pq(p+q)=3\cdot 11\cdot 61$$

⟵ 与式は $p,\ q$ に関する対称式でなので，基本対称式 $p+q,\ pq$ で表すことができる．

$u=p+q,\ v=pq$ とおくと

$$3(u^3-3uv)-uv=3\cdot 11\cdot 61$$

$$u(3u^2-10v)=3\cdot 11\cdot 61 \qquad \cdots\cdots ①$$

$p,\ q$ は $t^2-ut+v=0$ の正の整数解であるから，$f(t)=t^2-ut+v$ とおくと

$$\begin{cases} \text{判別式}: u^2-4v \geqq 0 \\ \text{軸の位置}: \dfrac{u}{2} \geqq 1 \\ \text{端点の符号}: f(1)=1-u+v \geqq 0 \end{cases} \qquad \therefore \begin{cases} v \leqq \dfrac{u^2}{4} \\ u \geqq 2 \\ v \geqq u-1 \end{cases}$$

⟵ 解の配置

が必要である．このもとで，左辺の約数 u と $3u^2-10v$ の大小を比較すると

$$(3u^2-10v)-u \geqq 3u^2-10\cdot\frac{u^2}{4}-u=\frac{u^2}{2}-u$$

$$=\frac{u(u-2)}{2} \geqq 0 \quad (\because\ u \geqq 2)$$

$$\therefore \quad u \leqq 3u^2-10v$$

①より

$$\left(u,\ 3u^2-10v\right)=(3,\ 11\cdot 61),\ (11,\ 3\cdot 61),\ (33,\ 61)$$

⟵ 約数の組合せが決まった．

チェクリピ 199

である．

(i) $\left(u,\ 3u^2-10v\right)=(3,\ 11\cdot 61)$ のとき

$$v=\frac{3u^2-11\cdot 61}{10}=\frac{3\cdot 3^2-11\cdot 61}{10}<0 \qquad \text{不適.}$$

(ii) $\left(u,\ 3u^2-10v\right)=(11,\ 3\cdot 61)$ のとき

$$v=\frac{3u^2-3\cdot 61}{10}=\frac{3\cdot 11^2-3\cdot 61}{10}=3\cdot 6=18$$

$p,\ q$ は $t^2-11t+18=0$ の解である．

$$(t-2)(t-9)=0 \qquad \therefore \quad t=2,\ 9$$

(iii) $\left(u,\ 3u^2-10v\right)=(33,\ 61)$ のとき

$$v=\frac{3u^2-61}{10}=\frac{3\cdot 33^2-61}{10}=\frac{3206}{10} \fallingdotseq (\text{整数}) \quad \text{不適.}$$

以上より，　$(p,\ q)=\mathbf{(2,\ 9),\ (9,\ 2)}$ ……(答)

- u と $3u^2-10v$ との大小については

$$\begin{aligned}(3u^2-10v)-u &= 3(p+q)^2-10pq-(p+q)\\ &= 3p^2+3q^2-4pq-p-q\\ &= 2(p-q)^2+p^2+q^2-p-q\\ &= 2(p-q)^2+p(p-1)+q(q-1)\\ &\geqq 0 \quad (\because\ p\geqq 1,\ q\geqq 1)\end{aligned}$$

としてもよいが，$u=p+q$，$uv=pq$ と置き換えたものをまた p，q に戻すのは置き換えの意味がない．これならば，置き換えはやめて

$$(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)=2013$$

左辺の約数の差 $(3p^2-4pq+3q^2)-(p+q)=\cdots\geqq 0$ を示して

$$\begin{aligned}&\left(p+q,\ 3p^2-4pq+3q^2\right)\\ =&(3,\ 11\cdot 61),\ (11,\ 3\cdot 61),\ (33,\ 61)\end{aligned}$$

と絞っていけばよい．

- ①かつ $u-1\leqq v\leqq \dfrac{u^2}{4}$ より

$$\begin{aligned}&u-1\leqq \frac{3u^3-2013}{10u}\leqq \frac{u^2}{4}\\ \iff& 10u^2-10u\leqq 3u^3-2013\leqq \frac{5}{2}u^3 \quad (\because\ u\geqq 2)\\ \iff& \begin{cases}3u^3-10u^2+10u\geqq 2013 & \cdots\cdots ②\\ u^3\leqq 4026 & \cdots\cdots ③\end{cases}\end{aligned}$$

$16^3=4096$ より③に注意すると　$u=3$ または 11

さらに，②をみたすものとして $u=11$ に絞ることができる．