次の各問に答えよ．

(1) 504 の正の約数はいくつあるか求めよ．1 と 504 自身も正の約数であることに注意せよ．

(2) 504 と自然数 x との最大公約数を g，最小公倍数を l とする．504 の正の約数の個数を n としたとき，g の正の約数の個数は $\dfrac{n}{3}$，l の正の約数の個数は $\dfrac{9}{2}n$ であった．x の素因数が 2, 3, 5, 7 であるとき，g, l, x の値を求めよ．

(13 中京大 工 3)

(1) 24

(2) $g = 42$，$l = 88200$，$x = 7350$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1) 正の約数の個数は大丈夫ですね.

(2) $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ と $x = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s$ の素因数をみて，g, l の素因数を調べましょう．このとき g, l の正の約数の個数の情報が使われます.

【解答】

(1) $504 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 7$ より，504 の正の約数は

$$2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \quad (0 \leqq a \leqq 3\ ,\ 0 \leqq b \leqq 2\ ,\ 0 \leqq c \leqq 1)$$

← 素因数分解

と表される．a, b, c のとり方はそれぞれ 4 通り，3 通り，2 通りあるから，504 の正の約数の個数は

← (3+1)(2+1)(1+1)

$$4 \cdot 3 \cdot 2 = \mathbf{24}\ (\text{個}) \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(2) x の素因数は 2, 3, 5, 7 であるから

$$x = 2^p \cdot 3^q \cdot 5^r \cdot 7^s \quad (p,\ q,\ r,\ s \text{ は 1 以上の整数})$$

と表すことができる.

504 と x の最大公約数 g は

$$g = 2^d \cdot 3^e \cdot 7 \quad (d = \min\{3,\ p\},\ e = \min\{2,\ q\})$$

← $\min\{x,\ y\}$ は x, y の大きくない方の数である.

と表すことができる．(1) より $n = 24$ であり，g の正の約数の個数は $\dfrac{n}{3} = \dfrac{24}{3} = 8$ であるから

$$(d+1)(e+1)(1+1) = 2^3$$

$$(d+1)(e+1) = 2^2$$

← d, e についての不定方程式

d, e は 1 以上の整数より

$$d + 1 = e + 1 = 2$$

$$\therefore\quad d = e = 1$$

$$\therefore\quad g = 2^1 \cdot 3^1 \cdot 7 = \mathbf{42} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

このとき，$p = q = 1$ であり，504 と $x = 2 \cdot 3 \cdot 5^r \cdot 7^s$ の最小公約数 l は

$$l = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^r \cdot 7^s \quad (r,\ s \text{ は 1 以上の整数})$$

と表すことができる．l の正の約数の個数は $\dfrac{9}{2}n = \dfrac{9}{2} \cdot 24 = 108$ であるから

$$(3+1)(2+1)(r+1)(s+1) = 108$$

$$(r+1)(s+1) = 9 = 3^2$$

← r, s についての不定方程式

r, s は 1 以上の整数より

$$r + 1 = s + 1 = 3$$

$$\therefore\quad r = s = 2$$

よって

$$l = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = \mathbf{88200}, \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$$x = 2 \cdot 3 \cdot 5^2 \cdot 7^2 = \mathbf{7350} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$