

a, b を 100 以下の正の整数とする. 2つの分数 $\frac{a}{27}, \frac{31}{b}$ がどちらも既約分数であり, かつ, 和 $\frac{a}{27} + \frac{31}{b}$ が整数であるとする. このような (a, b) の組をすべて求めよ.

(13 千葉大 2)

(23, 27), (50, 27), (77, 27)

【チェック・チェック】

$\frac{p}{q}$ が既約分数であるということは、それ以上約分できない分数のことで、これは「 p, q が互いに素」ということです。

$\frac{a}{27}, \frac{31}{b}$ が既約分数であるという条件が使えるように式を変形してみましょう。

【解答】

$$\frac{a}{27} + \frac{31}{b} = n \quad (n \text{ は整数}) \text{ とおくことができる.}$$

$$ab + 31 \cdot 27 = 27bn \quad \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①を変形して

$$ab = 27(bn - 31) \quad \therefore \frac{ab}{27} = bn - 31$$

$\frac{a}{27}$ は既約分数より、 a と 27 は互いに素である。右辺は整数より、 b は 27 の倍数である。

また、①は次のようにも変形できる。

$$b(27n - a) = 31 \cdot 27 \quad \therefore \frac{31 \cdot 27}{b} = 27n - a$$

$\frac{31}{b}$ は既約分数より、 b と 31 は互いに素である。右辺は整数より、 b は 27 の約数である。

したがって、

$$b = 27$$

である。このとき、①は

$$a + 31 = 27n \quad \therefore a = 27n - 31$$

a は 100 以下の正の整数より、 $n = 2, 3, 4$ を代入し

$$a = 23, 50, 77$$

これらはいずれも 27 と互いに素であり、適する。……(*)

よって、 $(a, b) = (23, 27), (50, 27), (77, 27)$ ……(答)

- b が 27 の約数ならば、 b と 31 は互いに素であるが、 b が 27 の倍数であっても a と 27 が互いに素とは限らないので、最後の確認(*)は必要である。

← $\frac{a}{27}$ が現れるように式を変形する

← $\frac{31}{b}$ が現れるように式を変形する

← b は 27 の倍数かつ 27 の約数である