次の条件を満たしている正の整数 a, b, 正の奇数 c の組 $(a,\ b,\ c)$ を考える．

$$2^a = (4b - c)(b + c)$$

次の設問に答えよ．

(1) $b = 13$ のとき，a, c の値を求めよ．

(2) $a \leqq 2013$ である組 $(a,\ b,\ c)$ の個数を求めよ．

(13 早稲田大 商 3)

(1) $c = 51,\ a = 6$

(2) 503 個

【チェック・チェック】

右辺の積と左辺の 2^a の約数を比較しましょう．

(1) は (2) を解くための適切な誘導になっています．問題を解決するためにはまず特殊化したもの具体的のものを考えるという姿勢は大切です．

【解答】

$$2^a=(4b-c)(b+c) \qquad \cdots\cdots (*)$$

(1) $b=13$ のとき，$(*)$ は

$$2^a=(52-c)(13+c) \qquad \cdots\cdots ①$$

⟵ 右辺の積と左辺の 2^a の約数を比較する．

①において，$2^a>0$，また $c>0$ より $13+c>0$ であるから $52-c>0$ である．さらに，c は正の奇数より，$52-c$ は正の奇数，$13+c$ は正の偶数である．また，a は正の整数より，2^a は整数である．正の整数 2^a の正の奇数の約数は 1 のみであるから，①を満たすのは

$$\begin{cases}52-c=1\\13+c=2^a\end{cases} \qquad \therefore \quad \boldsymbol{c=51,\ a=6} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) $(*)$ において，$2^a>0$，また，$b>0$，$c>0$ より，$b+c>0$ であるから $4b-c>0$ である．b は整数，c は正の奇数より $4b-c$ は正の奇数である．正の整数 2^a の正の奇数の約数は 1 のみであるから，$(*)$ を満たすのは

⟵ (1) と同じ考え方をする．

$$\begin{cases}4b-c=1 & \cdots\cdots ②\\b+c=2^a & \cdots\cdots ③\end{cases}$$

⟵ ③は文字が多いので文字の個数を減らしたい．

②＋③ より

$$5b=2^a+1 \qquad \cdots\cdots ④$$

であり

$$\{②,\ ③\} \iff \begin{cases}5b=2^a+1 & \cdots\cdots ④\\c=4b-1 & \cdots\cdots ②'\end{cases}$$

④かつ $a \leqq 2013$ を満たす正の整数 a が決まれば，④により正の整数 b が一意に決まり，②$'$ により正の奇数 c も一意に決まるから，④ かつ $1 \leqq a \leqq 2013$ を満たす整数 a の個数を求めればよい．

$$④ \iff 2^a=5b-1$$

2^a を 5 で割ったときの余りが 4 となるものを求める．

⟵ $5b-1=5(b-1)+4$

a	1	2	3	4	5	$\cdots$
余り	2	④	3	1	2	$\cdots$

2^a を 5 で割った余りは周期 4 で $2,\ 4,\ 3,\ 1$ を繰り返す．

⟵ 5 で割った余りは 0，1，2，3，4 の 5 種類しかなく，同じ値が 1 度現れるとその後の余りは同じ値が繰り返される．

$$a=4k+2 \ (k \geqq 0)$$

とおくことができる．$a \leqq 2013$ より

$$4k+2 \leqq 2013 \qquad \therefore \quad k \leqq \frac{2011}{4}=502+\frac{3}{4}$$

$0 \leqq k \leqq 502$ をみたす整数 k は 503 個あるから，組 $(a,\ b,\ c)$ の個数は **503** 個である． ……(答)