自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ が等式 $x^2+y^2=z^2$ を満たすとする．

(1) すべての自然数 n について，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 のいずれかであることを示せ.

(2) x と y の少なくとも一方が偶数であることを示せ.

(3) x が偶数，y が奇数であるとする．このとき，x が 4 の倍数であることを示せ.

(13 早稲田大 政経 4)

(1) 略

(2) 略

(3) 略

【チェック・チェック】

等式 $x^2+y^2=z^2$ を満たす自然数の組 $(x,\ y,\ z)$ をピタゴラス数といいます．

$x,\ y$ の両方が偶数なら，z も偶数なので，$(x,\ y,\ z)=(2a,\ 2b,\ 2c)$ となります．$(a,\ b,\ c)$ が $x^2+y^2=z^2$ を満たすなら，$(ka,\ kb,\ kc)$ も $x^2+y^2=z^2$ を満たすから，3 数の最大公約数が 1 のピタゴラス数 $(a,\ b,\ c)$ が興味の対象となります．3 数の最大公約数が 1 のピタゴラス数 $(x,\ y,\ z)$ は $x,\ y$ の一方が偶数で，他方が奇数，しかも偶数となる数は 4 の倍数というのが本問の結論です．

【解答】

(1) 自然数 n を偶奇で分けると，$n=2k,\ 2k-1$ (k は自然数) とおける．

←― $2^2=4$ より n^2 を 4 で割った余りを求めるには，n を 2 で割った余り，すなわち，n の偶奇で場合分けするとよい．

(i) $n=2k$ のとき

$n^2=(2k)^2=4k^2$ であり，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 である．

(ii) $n=2k-1$ のとき

$n^2=(2k-1)^2=4(k^2-k)+1$ であり，n^2 を 4 で割ったときの余りは 1 である．

よって，すべての自然数 n について，n^2 を 4 で割ったときの余りは 0 か 1 のいずれかである． …… (証明終わり)

(2) 背理法を用いる．

←― 少なくとも一方が偶数であるということは，両方が奇数ということはないということです.「〜でない」という証明では背理法が威力を発揮することが多い．

$x,\ y$ がともに奇数であると仮定すると，$x=2p-1$，$y=2q-1$ ($p,\ q$ は自然数) とおける．

$$x^2+y^2=z^2 \qquad \cdots\cdots (*)$$

において，

$$\begin{aligned}(\text{左辺}) &= (2p-1)^2+(2q-1)^2\\ &= 4(p^2-p+q^2-q)+2\end{aligned}$$

右辺の z^2 を 4 で割ったときの余りは (1) より 0 か 1 のいずれかであるから，不合理．

よって，x と y の少なくとも一方が偶数である．

…… (証明終わり)

(3) x が偶数，y が奇数であるとき，$x=2p,\ y=2q-1$，($p,\ q$ は自然数) とおける．

$$\begin{aligned}z^2 &= x^2+y^2=(2p)^2+(2q-1)^2\\ &= 4(p^2+q^2-q)+1\end{aligned}$$

であり，z^2 は奇数であり，z も奇数である．$z=2r-1$ (r は自然数) とおくと

←― 整数 X に対して，$X^2=$ (奇数) ならば X は奇数である．

$$\begin{aligned}(*) &\iff 4(p^2+q^2-q)+1=4(r^2-r)+1\\ &\iff p^2+q(q-1)=r(r-1)\\ &\iff p^2=r(r-1)-q(q-1)\end{aligned}$$

連続する 2 整数の積は偶数であるから，$p^2=$ (偶数) $-$ (偶数) は偶数である．すなわち，p は偶数であり，$p=2p'$ (p'は自然数) とおける．

←― 整数 X に対して，$X^2=$ (偶数) ならば X は偶数である．

よって，$x = 2p = 2(2p') = 4p'$ であり，x は 4 の倍数である．
…… (証明終わり)

- 背理法を用いる．

  x は 4 の倍数でない偶数であると仮定すると，
  $x = 4p + 2$ (p は 0 以上の整数) とおける．

  $$z^2 = (\text{偶数})^2 + (\text{奇数})^2 = (\text{奇数})$$

  であるから，z も奇数である．奇数である y，z を $y = 4q \pm 1$，$z = 4r \pm 1$ (q，r は 0 以上の整数，ただし $y = -1$，$r = -1$ は除く) とおくと

  $$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= (4p+2)^2 + (4q \pm 1)^2 \\ &= 8(2p^2 + 2p + 2q^2 \pm q) + 5 \\ &= (8\text{ の倍数}) + 5 \\ z^2 &= (4r \pm 1)^2 = 8(2r^2 \pm r) + 1 \\ &= (8\text{ の倍数}) + 1 \end{aligned}$$

  これは $x^2 + y^2 = z^2$ であることに反する．
  よって，偶数 x は 4 の倍数である．