自然数 n に対して，n^2 を 3 で割ると 1 余ることは，n を 3 で割ると 1 余るための $\boxed{\text{ス}}$．ただし，$\boxed{\text{ス}}$ については，以下の⓪～③から 1 つを選べ．

⓪ 必要十分条件である

① 必要条件であるが，十分条件ではない

② 十分条件であるが，必要条件ではない

③ 必要条件でも十分条件でもない

(13 法政大 理工・デザイン・生命科学 1(4))

ス
①

【チェック・チェック】

必要十分の言葉使いは大丈夫でしょうか.

「$p \Longrightarrow q$ が真」のとき,

「p は q の十分条件」,「q は p の必要条件」

であるといいます.

整数 n を 3 で割った余りで分類すると

$$n \equiv 0,\ 1,\ 2 \pmod 3$$

であり，n^2 を 3 で割った余りはそれぞれ

$$n^2 \equiv 0,\ 1,\ 1 \pmod 3$$

であることに注意しましょう.

【解答】

p :「n^2 を 3 で割ると 1 余る」
q :「n を 3 で割ると 1 余る」

(i) $p \Longrightarrow q$ について

$2^2 = 3 + 1$ より，2^2 を 3 で割った余りは 1 であるが，2 を 3 で割った余りは 2 であるから，$p \Longrightarrow q$ は偽である.　$\longleftarrow$ p は q の十分条件ではない.

(ii) $q \Longrightarrow p$ について

$n = 3k + 1$ (k は整数) とおくことができる．このとき

$$n^2 = (3k+1)^2 = 9k^2 + 6k + 1 = 3(3k^2 + 2k) + 1$$

$3k^2 + 2k$ は整数であるから，$q \Longrightarrow p$ は真である.　$\longleftarrow$ p は q の必要条件である.

よって，p は q であるための

必要条件であるが，十分条件ではない．① ……(答)　$\longleftarrow$ チェクリピ

- 整数 n を 3 で割った余りで分類すると

$$3k,\ 3k+1,\ 3k+2\ (k \text{ は整数})$$

とおける．$3k + 2 = 3(k+1) - 1$ であり，$k + 1$ を改めて k とおくことにより

$$3k,\ 3k \pm 1\ (k \text{ は整数})$$

としてもよい.

$$(3k)^2 = 3 \cdot (3k^2)$$
$$(3k \pm 1)^2 = 3 \cdot (3k^2 \pm 2k) + 1$$

であるから

- ◦ n^2 を 3 で割った余りは 0 である
  $\Longleftrightarrow$ n を 3 で割った余りは 0 である
- ◦ n^2 を 3 で割った余りは 1 である
  $\Longleftrightarrow$ n を 3 で割った余りは 1 または 2 である

したがって，$n = 3k + 2$ となる自然数 n は (i) $p \Longrightarrow q$ の反例となる.