i を虚数単位として $\omega = \dfrac{-1+\sqrt{3}\,i}{2}$ とおくと $\omega^2 = \boxed{\text{ア}}$，$\omega^3 = \boxed{\text{イ}}$ である．整数 $a,\ b,\ c$ に対して x についての 3 次式 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ が条件

(i) $f(\sqrt{2}) = 0$　　(ii) $f(\omega)$ は実数となる

を満たすとき，$a = \boxed{\text{ウ}}$，$b = \boxed{\text{エ}}$，$c = \boxed{\text{オ}}$ である．

(13 関西学院大 文系 2 月 1 日 2(1))

ア	イ	ウ	エ	オ
$\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$	1	-2	-2	4

【チェック・チェック】

1 の虚数立方根を扱った問題です．$z^3=1$ を満たす z を 1 の立方根といい，$z^3-1=0$ を満たす z は

$$(z-1)(z^2+z+1)=0 \qquad \therefore \quad z=1,\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$$

であり，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ が 1 の虚数立方根です．$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ とおくと

(i) $\omega^3=1$
(ii) $\omega^2+\omega+1=0$
(iii) $\overline{\omega}=\omega^2$

といった性質があります．

【解答】

$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ より

$$\omega^2=\left(\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\frac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\underset{ア}{\boxed{\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}}}$$

⟵ $i^2=-1$

$$\omega^3=\omega^2\cdot\omega=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\frac{1-3i^2}{4}=\underset{イ}{\boxed{1}}$$

⟵ ω は 1 の虚数立方根である．

このとき

$$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}+2a+\sqrt{2}b+c=(2a+c)+(b+2)\sqrt{2}$$

$$\begin{aligned}f(\omega)&=1+\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}a+\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}b+c\\&=\frac{2-a-b+2c}{2}-\frac{(a-b)\sqrt{3}}{2}i\end{aligned}$$

a，b，c は整数より

(i) $f(\sqrt{2})=0 \iff \begin{cases}2a+c=0 & \cdots\cdots ①\\ b+2=0 & \cdots\cdots ②\end{cases}$

⟵ a, b, a', b' が有理数，$\sqrt{p}$ が無理数のとき
$a+b\sqrt{p}$
$=a'+b'\sqrt{p}$
$\iff \begin{cases}a=a'\\ b=b'\end{cases}$
特に
$a+b\sqrt{p}=0$
$\iff a=b=0$
チェクリピ「無理数の相等」

(ii) $f(\omega)$ は実数となる $\iff$ 虚部：$-\dfrac{(a-b)\sqrt{3}}{2}=0$
$\iff a-b=0 \quad \cdots\cdots ③$

{①，②，③} を解いて

$$a=\underset{ウ}{\boxed{-2}},\ b=\underset{エ}{\boxed{-2}},\ c=\underset{オ}{\boxed{4}}$$