初項 $a_1=1$，公差 $\dfrac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ がある．数列 $\{a_n\}$ の項のうち，値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列は等差数列をなし，初項は $\boxed{\text{ア}}$，公差は $\boxed{\text{イ}}$ となる．したがって 49 以下の a_n のうち整数とならない項の総和は $\boxed{\text{ウ}}$ となる．

次に初項 $b_1=2$，公差 $\dfrac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ を考える．2 つの数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列を $\{c_n\}$ とすると，数列 $\{c_n\}$ は等差数列となり，初項は $\boxed{\text{エ}}$，公差は $\boxed{\text{オ}}$ となる．

(13 同志社大 文情 (理系)・生医・スポ 1(1))

ア	イ	ウ	エ	オ
1	2	1200	5	6

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

与えられた数列を書き並べて整数の項をみつけたり，2 つの数列を書き並べて共通項をみつけたりしてみましょう．

【解答】

初項 $a_1=1$，公差 $\frac{2}{3}$ の等差数列 $\{a_n\}$ を書き並べると

$$\{a_n\}:1,\ \frac{5}{3},\ \frac{7}{3},\ 3,\ \frac{11}{3},\ \frac{13}{3},\ 5,\ \cdots \qquad \cdots\cdots ①$$

⟵ 状況を把握する．

このうち値が整数となる項を小さい方から順に並べてできる数列を $\{p_n\}$ とすると

$$\{p_n\}:1,\ 3,\ 5,\ \cdots$$

$\{p_n\}$ は，初項 $\underset{ア}{\boxed{\mathbf{1}}}$，公差 $\underset{イ}{\boxed{\mathbf{2}}}$ の等差数列である．　……(答)

$$a_n=1+(n-1)\cdot\frac{2}{3}=\frac{2n+1}{3},$$
$$p_n=1+(n-1)\cdot 2=2n-1$$

⟵ 等差数列の一般項

より

$$a_n \leqq 49 \iff \frac{2n+1}{3}\leqq 49 \qquad \therefore\quad n\leqq\frac{49\cdot 3-1}{2}=73$$

$$p_n \leqq 49 \iff 2n-1\leqq 49 \qquad \therefore\quad n\leqq\frac{49+1}{2}=25$$

⟵ 49 以下となる n の範囲を求める．

よって，49 以下の a_n のうち整数とならない項の総和は

$$\sum_{k=1}^{73}a_k-\sum_{k=1}^{25}p_k$$
$$=\frac{73(a_1+a_{73})}{2}-\frac{25(p_1+p_{25})}{2}$$
$$=\frac{73(1+49)}{2}-\frac{25(1+49)}{2}$$
$$=(73-25)25$$
$$=\underset{ウ}{\boxed{\mathbf{1200}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

⟵ 全体から整数となる項を除いた和を求める．

(等差数列の和)
$=\dfrac{(項数)(初項+末項)}{2}$

次に初項 $b_1=2$，公差 $\frac{3}{2}$ の等差数列 $\{b_n\}$ を書き並べると

$$\{b_n\}:2,\ \frac{7}{2},\ 5,\ \frac{13}{2},\ 8,\ \cdots \qquad \cdots\cdots ②$$

⟵ 状況を把握する．

①，②より，数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ に共通に含まれる項を，小さい方から順に並べてできる数列 $\{c_n\}$ の初項は $\underset{エ}{\boxed{\mathbf{5}}}$ である．　……(答)

$\{c_n\}$ の公差を d とすると

$$d=\frac{2}{3}m=\frac{3}{2}n$$

ただし，$(m,\ n)$ は $\frac{2}{3}m=\frac{3}{2}n$ を満たす最小な自然数の組である．

$$\frac{2}{3}m=\frac{3}{2}n \iff m=\frac{9}{4}n$$

⟵ 1 次の不定方程式

これを満たす最小な自然数 n は $n=4\ \left(m=\frac{9}{4}\cdot 4=9\right)$ である．

よって，公差 d は

$$d=\frac{3}{2}\cdot 4\left(=\frac{2}{3}\cdot 9\right)=\underset{オ}{\boxed{\mathbf{6}}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

である．