n を 1 以上の整数とし，θ を $0 < \theta < 2\pi$ を満たす定数とする．数列 $\{a_n\}$ が $a_n = \cos(n\theta)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられるとき，次の問いに答えよ．

(1) $p,\ q,\ r$ がこの順に等比数列となるとき，q^2 を p と r を用いて表せ．

(2) 数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるような θ の値を全て求めよ．

(3) 1 以上の全ての整数 n に対して $a_{n+3} = a_n$ が成り立つような θ の値を全て求めよ．

(13 同志社大 文情 (理系)・生医・スポ 2)

(1) $q^2 = pr$

(2) $\theta = \pi$

(3) $\theta = \dfrac{2\pi}{3},\ \dfrac{4\pi}{3}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

(1) これは等比数列をなす条件として覚えておくべき事柄です.
(2) まずは必要条件として，a_1，a_2，a_3 がこの順に等比数列となるための θ の条件を求めます. 次に θ がその値のとき，すべての自然数 n に対して $\{a_n\}$ が等比数列をなすこと，すなわち十分性を確認します.
(3) まずは $a_{n+3} = a_n$ からつくられる三角方程式を解きましょう.

【解答】

(1) p，q，r がこの順に等比数列となるから，隣り合う項の比は一定であり

$$p : q = q : r \qquad \therefore \quad \boldsymbol{q^2 = pr} \qquad \cdots\cdots(答)$$

← q を等比中項という.
チェクリピ (309)

(2) 数列 $\{a_n\}$ が等比数列となるためには，a_1，a_2，a_3 がこの順に等比数列であることが必要である. (1) より

$$a_2{}^2 = a_1 a_3$$

← 必要条件

$a_n = \cos(n\theta)$ より

$$\cos^2 2\theta = \cos\theta\cos 3\theta$$
$$(2\cos^2\theta - 1)^2 = \cos\theta(4\cos^3\theta - 3\cos\theta)$$
$$4\cos^4\theta - 4\cos^2\theta + 1 = 4\cos^4\theta - 3\cos^2\theta$$
$$\cos^2\theta = 1$$
$$\therefore \quad \cos\theta = \pm 1$$

← cos の 2 倍角の定理, 3 倍角の定理

$0 < \theta < 2\pi$ より，$\cos\theta \fallingdotseq 1$ であり

$$\cos\theta = -1 \qquad \therefore \quad \theta = \pi$$

← cos の値が 1 つに絞られた.

このとき

$$a_n = \cos(n\pi) = (-1)^n$$

であり，$\{a_n\}$ は初項 -1，公比 -1 の等比数列である.

← 十分条件

以上より，$\quad \boldsymbol{\theta = \pi} \qquad \cdots\cdots(答)$

(3) $a_{n+3} = a_n$ とすると

$$\cos(n+3)\theta = \cos n\theta$$
$$(n+3)\theta = \pm n\theta + 2k\pi \quad (k \text{ は整数})$$
$$\therefore \quad \theta = \frac{2k\pi}{3},\ \frac{2k\pi}{2n+3}$$

よって，任意の自然数 n に対して成り立つような定数 θ は

$$\theta = \frac{2k\pi}{3}$$

← θ は定数である.

である. $0 < \theta < 2\pi$ より，求める θ の値は

$$\boldsymbol{\theta = \frac{2\pi}{3},\ \frac{4\pi}{3}} \qquad \cdots\cdots(答)$$