1 から 100 までの整数のうち，先頭が 1 で始まるものは 1，10，11，12，$\cdots$，19，100 の 12 個ある．

(1) 1 から 1000 までの整数のうち，先頭が 1 で始まるものの個数を求めよ．
(2) n を 1 以上の整数とする．1 から 10^n までの整数のうち，先頭が 1 で始まるものの個数を求めよ．また，それらの和を求めよ．
(3) $n \geqq 3$ ならば，(2) で求めた個数は 8 の倍数になることを示せ．

(13 広島大 後 総合科学 (理系) 2)

(1) 112 個
(2) $\dfrac{1}{9}(10^n+8)$ 個，和は $\dfrac{3\cdot 100^n+187\cdot 10^n+8}{198}$ 個
(3) 略

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

整数と数列の融合問題です.

(1) は心の準備で，(2) では扱う数の並び方をきちんと説明しながら求める個数を調べていきます．(3) では何故 $n \geqq 3$ なのかを考えましょう.

【解答】

(1) 1 から 1000 までの整数のうち，先頭が 1 で始まるものは,

1 から 100 までの 12 個，101 から 199 までの 99 個，さらに 1000 の 1 個 ⟵ 12 個は問題文での個数

であるから，求める個数は

$$12 + 99 + 1 = \mathbf{112\ (個)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(2) 1 から 10^n までの整数のうち，先頭が 1 で始まるものは,

k 桁 $(1 \leqq k \leqq n)$ のものが 10^{k-1}，$10^{k-1}+1$，$10^{k-1}+2$，$\cdots$，$10^{k-1}+(10^{k-1}-1)$ の 10^{k-1} 個, ⟵ 桁数で分けて個数を数える.

$(n+1)$ 桁のものが 10^n のみで 1 個 ⟵ 最後の 1 個も忘れない.

である．したがって，求める個数は

$$\left(\sum_{k=1}^{n} 10^{k-1}\right) + 1 = \frac{10^n - 1}{10 - 1} + 1 \qquad \longleftarrow \text{等比数列の和の計算}$$

$$= \mathbf{\frac{10^n + 8}{9}\ (個)} \qquad \cdots\cdots(答)$$

また，1 から 10^n までの整数のうち，先頭が 1 で始まる k 桁 $(1 \leqq k \leqq n)$ のものの和は，項数 10^{k-1}, 初項が 10^{k-1}，末項が $2 \cdot 10^{k-1} - 1$ の等差数列の和であるから

$$\frac{10^{k-1} \cdot \left\{10^{k-1} + (2 \cdot 10^{k-1} - 1)\right\}}{2} \qquad \longleftarrow \text{等差数列の和の計算}$$

$$= \frac{3}{2} \cdot 100^{k-1} - \frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}$$

である，$(n+1)$ 桁の整数は 10^n のみの 1 個であるから，求める和は

$$\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{3}{2} \cdot 100^{k-1} - \frac{1}{2} \cdot 10^{k-1}\right) + 10^n$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \frac{100^n - 1}{100 - 1} - \frac{1}{2} \cdot \frac{10^n - 1}{10 - 1} + 10^n$$

$$= \frac{100^n - 1}{66} - \frac{10^n - 1}{18} + 10^n$$

$$= \mathbf{\frac{3 \cdot 100^n + 187 \cdot 10^n + 8}{198}} \qquad \cdots\cdots(答)$$

(3) (2) で求めた個数を m とおくと

$$m = \frac{10^n + 8}{9} \qquad \therefore \quad 9m = 10^n + 8$$

$n \geqq 3$ ならば

$$9m = 10^{n-3} \cdot 1000 + 8 = 10^{n-3} \cdot 2^3 \cdot 5^3 + 8 \qquad \longleftarrow n \geqq 3 \text{ であることが効いている.}$$

$$= 8(5^3 \cdot 10^{n-3} + 1)$$

$5^3 \cdot 10^{n-3} + 1$ は整数であり，8 と 9 は互いに素であるから，m は 8 の倍数である. ⟵ 互いに素であることが大切.

よって，(2) で求めた個数は 8 の倍数になる.

$\cdots\cdots$ (証明終わり)