n は自然数とする．数列 $\{a_n\}$ を初項 2，公差 4 の等差数列とし，数列 $\{b_n\}$ を初項 1，公比 x の等比数列とする．ただし，$x \fallingdotseq 1$ とする．

(1) 一般項 a_n，b_n を求めよ．また，$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$ とするとき，S_n を求めよ．

(2) $T_n = \sum_{k=1}^{n} kb_k$ とする．$T_n = \dfrac{1-(n+1)x^n + nx^{n+1}}{(1-x)^2}$ が成り立つことを示せ．

(3) $x = \dfrac{1}{3}$ のとき，和 $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k$ を求めよ．

(13 徳島大 後 工・総合科 3)

(1) $a_n = 4n-2$，$b_n = x^{n-1}$，$S_n = \dfrac{1-x^n}{1-x}$

(2) 略

(3) $\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \dfrac{2(3^n-n-1)}{3^{n-1}}$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

(2) は教科書の例題で，(1)，(2) は (3) の準備になっています.

【解答】

(1) 数列 $\{a_n\}$ は初項 2，公差 4 の等差数列だから

$$a_n = 2+4(n-1) = \boldsymbol{4n-2} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 等差数列の一般項

数列 $\{b_n\}$ は初項 1，公比 x の等比数列だから

$$b_n = \boldsymbol{x^{n-1}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 等比数列の一般項

$x \fallingdotseq 1$ より

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} x^{k-1} = \boldsymbol{\frac{1-x^n}{1-x}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

⟵ 等比数列の和の公式

(2) $$T_n = \sum_{k=1}^{n} kb_k$$
$$= 1+2x+3x^2+4x^3+\cdots+nx^{n-1}$$
$$xT_n = \quad 1x+2x^2+3x^3+\cdots+(n-1)x^{n-1}+nx^n$$

2 式の差をとると

$$(1-x)T_n = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}-nx^n$$

⟵ 公比倍して，引いた.

$x \fallingdotseq 1$ より

$$(1-x)T_n = \frac{1-x^n}{1-x} - nx^n = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{1-x}$$
$$\therefore \quad T_n = \frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2} \quad \cdots\cdots(\text{証明終わり})$$

(3) $x=\dfrac{1}{3}$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n} a_kb_k$$
$$= \sum_{k=1}^{n}(4k-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$= \sum_{k=1}^{n}\left\{4k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\right\} \quad \cdots\cdots ③$$

⟵ S_n，T_n が利用できる.

$$=4\cdot\frac{1-\dfrac{n+1}{3^n}+\dfrac{n}{3^{n+1}}}{\left(1-\dfrac{1}{3}\right)^2} - 2\cdot\frac{1-\dfrac{1}{3^n}}{1-\dfrac{1}{3}} \quad (\because\ T_n,\ S_n)$$
$$=9\cdot\frac{3^{n+1}-3(n+1)+n}{3^{n+1}} - \frac{3^n-1}{3^{n-1}}$$
$$=\boldsymbol{\frac{2(3^n-n-1)}{3^{n-1}}} \quad \cdots\cdots(\text{答})$$

- T_n，S_n が利用できるように，③の形に変形したが，直接計算することもできる.

$$U_n = \sum_{k-1}^{n} a_kb_k = \sum_{k=1}^{n}(4k-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \text{ とおくと}$$

$$U_n = \sum(\text{等差数列})\left(\text{公比}\frac{1}{3}\text{の等比数列}\right)$$

であり，(2) と同じように

$$U_n - \frac{1}{3}U_n$$

⟵ 公比倍して，引く.

を計算すれば

$$\frac{2}{3}U_n = 2 + 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$- (4n-2)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= (-2+4) + 4\cdot\frac{1}{3} + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2 + \cdots + 4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$
$$- (4n-2)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= -2 + 4\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n}{1-\frac{1}{3}} - (4n-2)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= -2 + 6\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\} - (4n-2)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= 4 - (4n+4)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$
$$= \frac{4(3^n-n-1)}{3^n}$$

$$\therefore\quad U_n = \frac{2(3^n-n-1)}{3^{n-1}}$$

- $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(4k-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ を階差に分解する手もある．すなわち

$\longleftarrow$ 「階差への分解」は和を計算するための基本変形である．

$$(4k-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = c_{k+1} - c_k$$

となる c_k を求める．

$c_k = (pk+q)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$ ($p,\ q$ は定数) とおくと

$$c_{k+1} - c_k$$
$$=\{p(k+1)+q\}\left(\frac{1}{3}\right)^k - (pk+q)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$=\left\{\frac{pk+p+q}{3} - (pk+q)\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$
$$=\frac{-2pk+p-2q}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

$$\therefore\quad (4k-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \frac{-2pk+p-2q}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

これが任意の k で成立する条件は

$$\begin{cases} -\dfrac{2p}{3} = 4 \\ \dfrac{p-2q}{3} - 1 \end{cases}\qquad \therefore\quad p=-6,\ q=0$$

$$\therefore\quad c_k = -6k\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}$$

よって，

$$\sum_{k=1}^{n}(4k-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} = \sum_{k=1}^{n}(c_{k+1}-c_k)$$
$$=c_{n+1} - c_1 = -6(n+1)\left(\frac{1}{3}\right)^n - (-6)$$
$$=\frac{2(3^n-n-1)}{3^{n-1}}$$