次の数列の初項から第 n 項までの和を求めよ.

$$7,\ 67,\ 667,\ 6667,\ 66667,\ \cdots$$

(13 静岡文芸大 デザイン 8)

$\dfrac{1}{27}(2\cdot 10^{n+1}+9n-20)$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

第 n 項を a_n とすると，

$$a_n = 66\cdots67 = \underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{ 個}}0 + 7$$

であり，$66\cdots60$ は等比数列の和として表すことができます.

【解答】

第 n 項を a_n とおくと，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}
a_n &= \underbrace{66\cdots6}_{n-1\text{ 個}}7 \\
&= 6(10^{n-1} + 10^{n-2} + \cdots + 10) + 7 \\
&= 6(10 + \cdots + 10^{n-2} + 10^{n-1}) + 7 \\
&= 6 \cdot \frac{10(10^{n-1} - 1)}{10 - 1} + 7 \\
&= \frac{2}{3}(10^n - 10) + 7 \\
&= \frac{1}{3}(2 \cdot 10^n + 1)
\end{aligned}$$

← チェクリピ (308)

← 位を入れて数を表記する.

← 等比数列の和 $= \dfrac{(\text{初項})(\text{公比}^{(\text{項数})} - 1)}{\text{公比} - 1}$

である. これは $n = 1$ のときも成り立つ.

よって, 求める和は

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}(2 \cdot 10^k + 1) \\
=& \frac{2}{3} \cdot \frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} + \frac{1}{3} \cdot n \\
=& \frac{2}{27}(10^{n+1} - 10) + \frac{n}{3} \\
=& \boldsymbol{\frac{1}{27}(2 \cdot 10^{n+1} + 9n - 20)}
\end{aligned}$$

……(答)

← $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} 1 = \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\text{ 個}} = n$