数列 $\{a_n\}$ の初項 a_1 から第 n 項 a_n までの和を S_n とするとき,

$$S_n = \frac{1}{3} - (n+2)a_n$$

を満たすとする.

(1) a_1 の値は $\boxed{\text{ア}}$ である.

(2) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ を n の式で表すと $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \boxed{\text{イ}}$ である.

(3) $\dfrac{a_n}{a_1}$ を n の式で表すと $\dfrac{a_n}{a_1} = \boxed{\text{ウ}}$ である.

(4) 数列 $\{a_n\}$ の一般項は $a_n = \boxed{\text{エ}}$ である.

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} \frac{1}{a_n}$ の値は $\boxed{\text{オ}}$ である.

(13 九州産大 情報・工 4)

ア	イ	ウ	エ	オ
$\frac{1}{12}$	$\frac{n+2}{n+4}$	$\frac{12}{(n+2)(n+3)}$	$\frac{1}{(n+2)(n+3)}$	720

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

数列 $\{a_n\}$ とその和 $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ の関係についての問題です.

$$a_n=\begin{cases} S_n-S_{n-1} & (n \geqq 2) \\ S_1 & (n=1) \end{cases}$$

が基本です.

また，$\sum_{k=1}^{n} k^2$，$\sum_{k=1}^{n} k$，$\sum_{k=1}^{n} 1$ の公式は自由に使えるようにしておきましょう.

【解答】

(1) $a_1=S_1=\dfrac{1}{3}-3a_1$ より　　$\longleftarrow a_1=S_1$

$$3a_1=\frac{1}{3} \qquad \therefore \quad a_1=\boldsymbol{\frac{1}{12}}$$ ……(答)

(2) $a_{n+1}=S_{n+1}-S_n$ より　　$\longleftarrow a_{n+1}=S_{n+1}-S_n \ (n \geqq 1)$

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \left\{\frac{1}{3}-(n+3)a_{n+1}\right\}-\left\{\frac{1}{3}-(n+2)a_n\right\} \\ &= -(n+3)a_{n+1}+(n+2)a_n \end{aligned}$$

$$\therefore \quad (n+4)a_{n+1}=(n+2)a_n$$

よって　$\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=\boldsymbol{\dfrac{n+2}{n+4}}$ ……(答)

(3) (2) より $a_{n+1}=\dfrac{n+2}{n+4}a_n$ であり，これを繰り返し用いると

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{n+1}{n+3}a_{n-1} \\ &= \frac{n+1}{n+3}\cdot\frac{n}{n+2}a_{n-2} \\ &= \cdots \\ &= \frac{\cancel{n+1}}{n+3}\cdot\frac{\cancel{n}}{n+2}\cdot\frac{\cancel{n-1}}{\cancel{n+1}}\cdot\cdots\cdot\frac{\cancel{5}}{\cancel{7}}\cdot\frac{4}{\cancel{6}}\cdot\frac{3}{\cancel{5}}a_1 \end{aligned}$$

$\longleftarrow$ バタバタ約分されていく.

よって

$$\frac{a_n}{a_1}=\boldsymbol{\frac{12}{(n+2)(n+3)}}$$ ……(答)

- (2) の式は

$$\begin{aligned} (n+4)a_{n+1} &= (n+2)a_n \\ (n+4)(n+3)a_{n+1} &= (n+3)(n+2)a_n \end{aligned}$$

と変形される. $\{(n+3)(n+2)a_n\}$ は定数数列であり

$$(n+3)(n+2)a_n=4\cdot 3a_1$$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{a_1}=\frac{12}{(n+2)(n+3)}$$

(4) (1)，(3) より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{12}{(n+2)(n+3)}\cdot\frac{1}{12} \\ &= \boldsymbol{\frac{1}{(n+2)(n+3)}} \end{aligned}$$ ……(答)

(5) (4) より

$$\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{a_n}=\sum_{n=1}^{10}(n+2)(n+3)$$
$$=\sum_{n=1}^{10}(n^2+5n+6)$$
$$=\frac{10\cdot 11\cdot 21}{6}+5\times\frac{10\cdot 11}{2}+6\times 10$$
$$=385+275+60$$
$$=\mathbf{720}$$

……(答)

$\longleftarrow$ $\sum\limits_{k=1}^{n}k^2$, $\sum\limits_{k=1}^{n}k$, $\sum\limits_{k=1}^{n}1$ の公式

- $\sum\limits_{n=1}^{10}(5n+6)$ は等差数列 $\{5n+6\}$ の和であるから

$$\sum_{n=1}^{10}(5n+6)=\frac{10(11+56)}{2}=5\cdot 67=335$$

$\longleftarrow$ 等差数列の和 $=\dfrac{(項数)(初項+末項)}{2}$

として計算してもよい.

- さらには, $\sum\limits_{n=1}^{10}(n+2)(n+3)$ は連続積の和より

$$\sum_{n=1}^{10}(n+2)(n+3)$$
$$=\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{10}\{(n+2)(n+3)(n+4)-(n+1)(n+2)(n+3)\}$$
$$=\frac{1}{3}(12\cdot 13\cdot 14-2\cdot 3\cdot 4)$$
$$=\frac{2\cdot 3\cdot 4}{3}(13\cdot 7-1)$$
$$=720$$

$\longleftarrow$ $\sum(連続積)=\sum(階差)$

として計算することもできる.