次の各問に答えよ．(2) は空欄にあてはまる数または式を解答欄に記入せよ．

(1) 数列 $\{a_n\}$ が

$$a_n = \frac{1}{(2n-1)(2n+1)} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与えられている．このとき，和 $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ を求めよ．また，S_n は

$$S_n - S_{n-1} = (1 - 2S_{n-1})(1 - 2S_n) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすことを示せ．

(2) 数列 $\{b_n\}$ の和 $T_n = b_1 + b_2 + \cdots + b_n$ が

(∗) $\qquad T_n - T_{n-1} = (1 - 2T_{n-1})(1 - 2T_n) \quad (n = 2,\ 3,\ \cdots)$

を満たしている．もし，$T_1 = \dfrac{1}{2}$ ならば，(∗) で $n = 2$ ととれば，$T_2 = T_1 = \dfrac{1}{2}$ となる．同様に，(∗) で $n = 3,\ 4,\ \cdots$ ととれば，$T_n = \dfrac{1}{2}$ $(n = 3,\ 4,\ \cdots)$ となる．

いま，$T_n \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする．このとき，$U_n = 1 - 2T_n$ とおくと，U_n は漸化式 $\boxed{\text{(ア)}}$ を満たす．よって，$\dfrac{1}{U_1} = c\ (\fallingdotseq 0)$ とおけば，U_n は n と c を用いて，$U_n = \boxed{\text{(イ)}}$ と表せる．これより，$b_1 = \boxed{\text{(ウ)}}$，$b_n = \boxed{\text{(エ)}}$ が得られ，b_n が (1) の a_n と一致するのは $c = \boxed{\text{(オ)}}$ のときである．

(13 早稲田大 政経 2)

(1) $S_n = \dfrac{n}{2n+1}$，証明は略．

(2)

(ア)	(イ)	(ウ)	(エ)	(オ)
$\dfrac{1}{U_n} - \dfrac{1}{U_{n-1}} = 2$	$\dfrac{1}{2n+c-2}$	$\dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{c}\right)$	$\dfrac{1}{(2n+c-4)(2n+c-2)}$	3

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

(1) の $S_n=\sum_{k=1}^{n} a_k$ の計算では $\sum_{k=1}^{n}$(階差) と変形します．この変形は大切です．
(2) は 2 つ数列の和についてある等式が成り立つとします．このとき，2 つの数列が一致するための条件は何か？を求めています (初項が一致することが必要ですね).

【解答】

(1) $a_n=\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}$ より

$$\begin{aligned} S_n &= a_1+a_2+\cdots+a_n \\ &= \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2n+1}\right) \\ &= \boldsymbol{\frac{n}{2n+1}} \qquad \cdots\cdots ① \end{aligned}$$

←— $\sum$(階差) の形に分解する．

……(答)

次に，S_n は

$$S_n-S_{n-1}=(1-2S_{n-1})(1-2S_n) \quad (n \geqq 2) \quad \cdots\cdots ②$$

を満たすことを示す．$n \geqq 2$ のとき

$$(\text{左辺})=S_n-S_{n-1}=a_n$$

一方，①より

$$\begin{aligned} (\text{右辺}) &= (1-2S_{n-1})(1-2S_n) \\ &= \left\{1-2\cdot\frac{n-1}{2n-1}\right\}\left(1-2\cdot\frac{n}{2n+1}\right) \\ &= \frac{1}{2n-1}\cdot\frac{1}{2n+1}=a_n \end{aligned}$$

←— 右辺も a_n で表してみようと考える．

$$\therefore \quad (\text{左辺})=(\text{右辺})$$

であり，S_n は②を満たす． ……(証明終わり)

(2) 数列 $\{b_n\}$ の和 $T_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ が

$(*)$ $\qquad T_n-T_{n-1}=(1-2T_{n-1})(1-2T_n) \quad (n=2,\ 3,\ \cdots)$

を満たしている．

$T_n \fallingdotseq \dfrac{1}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ のとき，$U_n=1-2T_n$ $(\fallingdotseq 0)$ とおくと

$$\begin{aligned} (*) &\iff \frac{1}{2}(1-U_n)-\frac{1}{2}(1-U_{n-1})=U_{n-1}U_n \\ &\iff -\frac{1}{2}(U_n-U_{n-1})=U_{n-1}U_n \end{aligned}$$

←— T_n で表された式を U_n を用いた式に直す．

両辺を $U_{n-1}U_n(\fallingdotseq 0)$ で割ると，

$$-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{U_{n-1}}-\frac{1}{U_n}\right)=1$$

したがって，U_n は漸化式

$$\underbrace{\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{U_n}=\frac{1}{U_{n-1}}+2}}}_{(ア)}$$

……(答)

を満たす．

$\dfrac{1}{U_1}=c$ $(\fallingdotseq 0)$ とおけば，$\left\{\dfrac{1}{U_n}\right\}$ は初項 c，公差 2 の等差数列であるから

$$\frac{1}{U_n}=c+2(n-1)=2n+c-2$$

←— 等差数列の一般項

よって，U_n は n と c を用いて，

$$U_n = \underbrace{\boxed{\boldsymbol{\dfrac{1}{2n+c-2}}}}_{(\text{イ})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

と表せる．

$U_1 = 1 - 2T_1 = 1 - 2b_1$ より

$$b_1 = \frac{1}{2}(1 - U_1) = \underbrace{\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{c}\right)}}}_{(\text{ウ})} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

$n \geqq 2$ のとき，$(*)$ より

$$\begin{aligned} b_n &= T_n - T_{n-1} = (1 - 2T_{n-1})(1 - 2T_n) = U_{n-1}U_n \\ &= \underbrace{\boxed{\boldsymbol{\frac{1}{(2n+c-4)(2n+c-2)}}}}_{(\text{エ})} \qquad \cdots\cdots(\text{答}) \end{aligned}$$

が得られ，b_n が (1) の a_n と一致する条件は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{c}\right) = \dfrac{1}{3} & \cdots\cdots ③ \\ \dfrac{1}{(2n+c-4)(2n+c-2)} = \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} & \cdots\cdots ④ \end{cases}$$

③より，$c = 3$ であり，これは④を満たす．

よって，$c = \underbrace{\boxed{\boldsymbol{3}}}_{(\text{オ})}$ である． ……(答)

⟵ ③のみでは必要条件です．十分性も確認する．