数列 $\{a_n\}$ が，$a_1 = 1$，$a_{n+1} = a_n + 3$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められるとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}}$ を求めよ．

(13 東京電機大 1(3))

$\dfrac{n}{3n+1}$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

与えられた数列 $\{a_n\}$ は等差数列です．まずは一般項を求めましょう．

次の和の計算は $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}}$ を階差に分解することから始めます．

【解答】

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = a_n + 3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

←― 階差は一定値 3

数列 $\{a_n\}$ は初項 1，公差 3 の等差数列であるから

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n - 2$$

←― 等差数列の一般項

である．これより

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_k a_{k+1}} &= \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} \\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right)\end{aligned}$$

←― $\dfrac{1}{a_k a_{k+1}} = \dfrac{1}{3}\sum(\text{階差})$
チェクリピ (319)

であり

$$\begin{aligned}&\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{a_k a_{k+1}} \\ =&\frac{1}{3}\left\{\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{3n-2} - \frac{1}{3n+1}\right)\right\} \\ =&\frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \\ =&\boldsymbol{\frac{n}{3n+1}}\end{aligned}$$

……(答)

←― $\dfrac{1}{3}\sum_{k=1}^{n}(b_k - b_{k+1})$
$= \dfrac{1}{3}(b_1 - b_{n+1})$