次のような群にわかれた数列がある．

$$(1),\ (2,\ 4),\ (5,\ 7,\ 9),\ (10,\ 12,\ 14,\ 16),\ \cdots$$

(第 2 群の初項は第 1 群の末項に 1 を加えたものとし，第 3 群の初項は第 2 群の末項に 1 を加えたものとする．以下同様に第 n 群の初項は第 $n-1$ 群の末項に 1 を加えたものとする．第 n 群は公差 2，項数 n の等差数列である．)

このとき次の問に答えよ．

(1) 第 n 群に含まれる項の総和は $\boxed{\text{カ}}n^3 + \boxed{\text{キ}}n^2 + \boxed{\text{ク}}n$ である．

(2) 第 1 群から第 n 群に含まれるすべての項の総和は

$$\frac{1}{\boxed{\text{ケ}}}\left(\boxed{\text{コ}}n^4 + \boxed{\text{サ}}n^3 + \boxed{\text{シ}}n^2 + \boxed{\text{ス}}n\right)$$

である．

(13 早稲田大 人間科学 A2)

カ	キ	ク	ケ	コ	サ	シ	ス
1	-1	1	12	3	2	3	4

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

群の作り方をとらえることが大切です．第 n 群の初項を $a(n)$，末項を $b(n)$ とすると

$$a(n+1) = b(n) + 1$$

であることと

第 n 群は公差 2，項数 n の等差数列である

ことが与えられた条件です．

【解答】

(1) 第 n 群の初項を $a(n)$，末項を $b(n)$ とする．第 n 群は公差 2，項数 n の等差数列より，

$$b(n) = a(n) + 2(n-1)$$

← 等差数列の一般項

また，条件から

$$a(n+1) = b(n) + 1 = a(n) + 2n - 1$$

← 第 n 群の初項は第 $n-1$ 群の末項に 1 を加えたものである．

が成り立つ．したがって，$n \geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned} a(n) &= a(1) + \sum_{k=1}^{n-1}(2k-1) \\ &= 1 + \frac{1}{2}(n-1)\{1 + (2n-3)\} \\ &= 1 + (n-1)^2 \\ &= n^2 - 2n + 2 \end{aligned}$$

← $n \geqq 2$ であることに注意する．

← 等差数列の和 $= \frac{1}{2}$(項数)(初項 + 末項)

これは $n = 1$ のときにも成り立つ．

← $n = 1$ での成立を確かめる．

第 n 群に含まれる項の総和を $S(n)$ とすると

$$\begin{aligned} S(n) &= \frac{n\{a(n) + b(n)\}}{2} \\ &= \frac{n\{2a(n) + 2(n-1)\}}{2} \\ &= n\{(n^2 - 2n + 2) + (n-1)\} \\ &= n^3 - n^2 + n \\ &= \underset{カ}{\boxed{1}}n^3 + \underset{キ}{\boxed{-1}}n^2 + \underset{ク}{\boxed{1}}n \end{aligned}$$

……(答)

← 等差数列の和 $= \frac{1}{2}$(項数)(初項 + 末項)

(2) 第 1 群から第 n 群に含まれるすべての項の総和は

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{n} S(k) \\ =&\sum_{k=1}^{n}(k^3 - k^2 + k) \\ =&\frac{1}{4}n^2(n+1)^2 - \frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1) \\ =&\frac{1}{12}\{3(n^4 + 2n^3 + n^2) - 2(2n^3 + 3n^2 + n) + 6(n^2 + n)\} \\ =&\frac{1}{\underset{ケ}{\boxed{12}}}(\underset{コ}{\boxed{3}}n^4 + \underset{サ}{\boxed{2}}n^3 + \underset{シ}{\boxed{3}}n^2 + \underset{ス}{\boxed{4}}n) \end{aligned}$$

……(答)

← $\sum k^3$，$\sum k^2$，$\sum k$ の公式