

自然数を1から順に並べ、第 n 群が 3^{n-1} 個の自然数を含むように分割する。
例えば、第1群は $\{1\}$ であり、第2群は $\{2, 3, 4\}$ である。次の問いに答えよ。

$\{1\}, \{2, 3, 4\}, \{5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13\}, \dots$

- (1) 第 n 群の最初の数を求めよ。
- (2) 第 n 群に含まれるすべての自然数の和を求めよ。
- (3) 6^{20} は第何番目の群に含まれるか。

ただし、 $\log_{10} 2 = 0.3010$, $\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。

(13 県立広島大 経営情報・生命環境 2)

(1) $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$

(2) $3^{2(n-1)}$

(3) 第34番目の群

解答は次のページにあります。

【チェック・チェック】

群数列の問題は、第 n 群の初項または末項をおさえることが大切です。

【解答】

(1) $n \geq 2$ のとき、第 $n-1$ 群の最後の数は、第 1 群から第 $n-1$ 群までの項数に一致するから

$$1 + 3 + \dots + 3^{n-2} = \frac{3^{n-1} - 1}{3 - 1} = \frac{1}{2}(3^{n-1} - 1)$$

である。したがって、第 n 群の最初の数は

$$\frac{1}{2}(3^{n-1} - 1) + 1 = \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$$

であり、これは $n = 1$ のときも成り立つ。
よって、第 n 群の最初の数は

$$\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) \quad (n \geq 1) \quad \dots\dots (\text{答})$$

(2) 第 n 群には初項 $\frac{1}{2}(3^{n-1} + 1)$ 、末項 $\frac{1}{2}(3^n - 1)$ の自然数が 3^{n-1} 個並ぶから、求める和は

$$\begin{aligned} & \frac{3^{n-1}}{2} \left\{ \frac{1}{2}(3^{n-1} + 1) + \frac{1}{2}(3^n - 1) \right\} \\ &= \frac{3^{n-1}}{2} \cdot \frac{4 \cdot 3^{n-1}}{2} \\ &= 3^{2(n-1)} \end{aligned}$$

(3) 6^{20} が第 k 群に含まれるとすると、 k は

$$\frac{1}{2}(3^{k-1} - 1) < 6^{20} \leq \frac{1}{2}(3^k - 1) \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

を満たす。①を変形すると

$$\begin{aligned} \textcircled{1} &\iff 3^{k-1} - 1 < 2 \cdot 6^{20} \leq 3^k - 1 \\ &\iff 3^{k-1} \leq 2 \cdot 6^{20} < 3^k \\ &\iff (k-1) \log_{10} 3 \leq \log_{10}(2 \cdot 6^{20}) < k \log_{10} 3 \\ &\iff k-1 \leq \frac{\log_{10}(2 \cdot 6^{20})}{\log_{10} 3} < k \quad \dots\dots \textcircled{1}' \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \frac{\log_{10}(2 \cdot 6^{20})}{\log_{10} 3} &= \frac{\log_{10}(2^{21} \cdot 3^{20})}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{21 \log_{10} 2 + 20 \log_{10} 3}{\log_{10} 3} \\ &= \frac{21 \times 0.3010 + 20 \times 0.4771}{0.4771} \\ &= \frac{6.321 + 9.542}{0.4771} = \frac{15.863}{0.4771} \\ &= 33.2\dots \end{aligned}$$

①' を満たす自然数 k は 34 であるから、 6^{20} は第 **34 群** に含まれる。 $\dots\dots (\text{答})$

← n の範囲に注意する。

← 等比数列の和

← $n = 1$ のときを確かめる。

← 等差数列の和
= $\frac{(\text{項数})(\text{初項} + \text{末項})}{2}$

← チェクリビ (330)

← 第 $n-1$ 群の末項 $< 6^{20} \leq$ 第 n 群の末項

← -1 が邪魔。