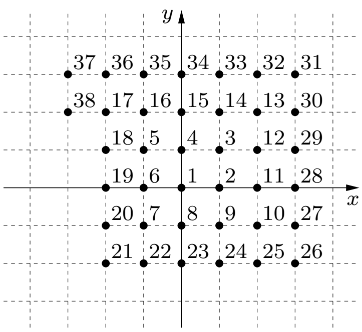
座標平面上の点 $(x,\ y)$ は，$x,\ y$ がともに整数のとき格子点という．

原点 $(0,\ 0)$ に番号 1 をふり，以下 $(1,\ 0)$ に番号 2，$(1,\ 1)$ に番号 3 と，各格子点に図のように反時計まわりに番号をふっていく．このとき，次の問に答えよ．



(1) n が自然数のとき，格子点 $(n,\ -n)$ にふられる番号を n の式で表せ．

(2) n が自然数のとき，格子点 $(n+1,\ n+1)$ にふられる番号を n の式で表せ．

(3) 番号 1000 がふられる格子点の座標を求めよ．

(13 香川大 医 3)

(1) $(2n+1)^2$

(2) $4n^2+6n+3$

(3) $(9,\ 16)$

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

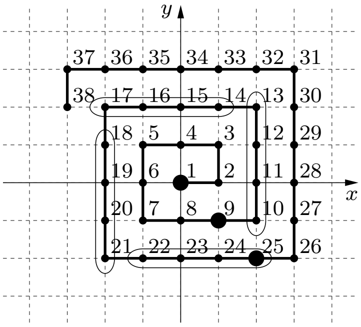
番号は渦巻状にふられています．渦が一周するときの格子点の個数を数えましょう．

【解答】

(1) 格子点 $(n,\ -n)$ にふられる番号を a_n とする．格子点 $(n+1,\ -n)$ から格子点 $(n+1,\ -(n+1))$ までふられる番号の数は，

(i) 格子点 $(n+1,\ -n)$ から格子点 $(n+1,\ n+1)$ までに

$$n+1+(n+1)$$
$$=2n+2 \text{ 個} \cdots\cdots ①$$



あり，同じく，

(ii) 格子点 $(n,\ n+1)$ から格子点 $(-(n+1),\ n+1)$ まで

(iii) 格子点 $(-(n+1),\ n)$ から格子点 $(-(n+1),\ -(n+1))$ まで

(iv) 格子点 $(-n,\ -(n+1))$ から格子点 $(n+1,\ -(n+1))$ まで

にそれぞれ $2n+2$ 個 あるから

$$a_{n+1}=a_n+4\cdot(2n+2)$$

が成り立つ．$a_0=1$ より，$n \geqq 1$ のとき

$$a_n=a_0+8\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)=1+8(1+2+\cdots+n)$$
$$=1+8\cdot\frac{n(n+1)}{2}=4n^2+4n+1=(2n+1)^2$$

(これは $n=0$ のときも成り立つ．)

よって，n が自然数のとき，格子点 $(n,\ -n)$ にふられる番号 a_n は

$$a_n=\boldsymbol{(2n+1)^2} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

- 格子点 $(n,\ -n)$ にふられる番号は，不等式

$$-n \leqq x \leqq n, \quad -n \leqq y \leqq n$$

で表される正方形の周および内部に含まれる格子点の個数と一致する．含まれる格子点は $(2n+1)^2$ 個であるから，格子点 $(n,\ -n)$ にふられる番号は $(2n+1)^2$ である．

(2) ①より，格子点 $(n+1,\ n+1)$ にふられる番号は

$$a_n+(2n+2)=(2n+1)^2+2n+2$$
$$=\boldsymbol{4n^2+6n+3} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

(これは $n=0$ のときも成り立つ．)

(3) $a_{15}=31^2=961$ だから，格子点 $(16,\ 16)$ にふられる番号は

$$961+2\cdot16=993$$

よって，番号 1000 がふられる格子点の座標は

$$(16-7,\ 16)=\boldsymbol{(9,\ 16)} \qquad \cdots\cdots(\text{答})$$

←― 番号付けの特徴をとらえる．

←― $\{a_n\}$ の階差がわかった．

←― 奇数の平方数 $(2n+1)^2$ で 1000 に近いものを見つける．