すべての自然数 n に対し，次の等式

$$1^2 - 2^2 + 3^2 - 4^2 + \cdots + (-1)^{n-1} n^2 = \frac{(-1)^{n-1} n(n+1)}{2} \qquad \cdots\cdots ①$$

が成り立つことを，n についての数学的帰納法を用いて示せ．

(13 明治大 総合数理 4)

略

解答は次のページにあります．

【チェック・チェック】

「数学的帰納法を用いて示せ.」が外れて「①を示せ」となっても解けるようにしたいものです．機械的な処理を覚えるのではなく，方針を選択する柔軟な視点を身につけたいものです.

【解答】

$$1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}n^2=\frac{(-1)^{n-1}n(n+1)}{2}$$

$\cdots\cdots$ ①

(i) $n=1$ のとき　　　⟵ 帰納法の第 1 段階

$$(\text{左辺})=1^2=1,\quad (\text{右辺})=\frac{(-1)^0\cdot 1\cdot 2}{2}=1$$

であり，①は成り立つ.

(ii) $n=k$ のときの成立を仮定すると　　　⟵ 帰納法の第 2 段階

$$\begin{aligned}&1^2-2^2+3^2-4^2+\cdots+(-1)^{k-1}k^2+(-1)^k(k+1)^2\\ =&\frac{(-1)^{k-1}k(k+1)}{2}+(-1)^k(k+1)^2\quad (\because\ \text{帰納法の仮定})\\ =&\frac{(-1)^k(k+1)\{-k+2(k+1)\}}{2}\\ =&\frac{(-1)^k(k+1)(k+2)}{2}\end{aligned}$$

⟵ ここで帰納法の仮定を使った.

となり，①は $n=k+1$ のときにも成り立つ.

(i)，(i) より，すべての自然数 n に対し，① は成り立つ.

$\cdots\cdots$ (証明終わり)

⟵ (i)，(ii) がセットになって帰納法が機能する.