数列 $\{x_n\}$, $\{y_n\}$ は，すべての項が正で，$\dfrac{y_n}{x_n} \leqq \dfrac{y_{n+1}}{x_{n+1}}$ の関係を満たしている．$x_1$ から $x_n$ までの和を $X_n$ で，また $y_1$ から $y_n$ までの和を $Y_n$ で表す．このとき次の問いに答えよ．

(1) $\dfrac{Y_1}{X_1} \leqq \dfrac{Y_2}{X_2}$ を示せ．

(2) $\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{y_n}{x_n}$ であることを数学的帰納法を用いて証明せよ．

(3) (2) の不等式を使って，$\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}$ であることを証明せよ．

(13 青山学院大 経済 4)

(1) 略

(2) 略

(3) 略

解答は次のページにあります.

# 【チェック・チェック】

自然数 $n$ に関する不等式を数学的帰納法で証明します．(1) の証明と同じことが (2)，(3) でも繰り返されます．(2) を無くして単に「(3) を示せ」となると難問となりますね．

---

【解答】

与えられた条件は

$$x_k > 0,\ y_k > 0,\ \frac{y_k}{x_k} \leqq \frac{y_{k+1}}{x_{k+1}}\ (k \geqq 1) \qquad \cdots\cdots ①$$

であり，また，$X_n = \sum_{k=1}^{n} x_k$，$Y_n = \sum_{k=1}^{n} y_k\ (n \geqq 1)$ である．

(1) 右辺と左辺の差をつくると

$$\begin{aligned}\frac{Y_2}{X_2} - \frac{Y_1}{X_1} &= \frac{X_1Y_2 - X_2Y_1}{X_1X_2} \\ &= \frac{x_1(y_1+y_2) - (x_1+x_2)y_1}{x_1(x_1+x_2)} \\ &= \frac{x_1y_2 - x_2y_1}{x_1(x_1+x_2)} \\ &= \frac{1}{x_1+x_2}\left(y_2 - \frac{x_2y_1}{x_1}\right) \\ &= \frac{x_2}{x_1+x_2}\left(\frac{y_2}{x_2} - \frac{y_1}{x_1}\right) \geqq 0 \quad (\because\ ①)\end{aligned}$$

⟵ (右辺) − (左辺) $\geqq 0$ を示す．

⟵ ①が使えるように式変形する．

$$\therefore\quad \frac{Y_1}{X_1} \leqq \frac{Y_2}{X_2}$$

……(証明終わり)

(2) $\dfrac{Y_n}{X_n} \leqq \dfrac{y_n}{x_n}$ ……($*$) であることを数学的帰納法を用いて証明する．

(i) $n=1$ のとき

$\dfrac{Y_1}{X_1} = \dfrac{y_1}{x_1}$ であるから，($*$) は成立する．

(ii) $n=m$ での成立を仮定する．

$$\begin{aligned}&\frac{y_{m+1}}{x_{m+1}} - \frac{Y_{m+1}}{X_{m+1}} \\ =&\frac{y_{m+1}}{x_{m+1}} - \frac{Y_m + y_{m+1}}{X_m + x_{m+1}} \\ =&\frac{y_{m+1}(X_m + x_{m+1}) - x_{m+1}(Y_m + y_{m+1})}{x_{m+1}(X_m + x_{m+1})} \\ =&\frac{y_{m+1}X_m - x_{m+1}Y_m}{x_{m+1}(X_m + x_{m+1})} \\ =&\frac{1}{X_m + x_{m+1}}\left(\frac{y_{m+1}X_m}{x_{m+1}} - Y_{m+1}\right) \\ =&\frac{X_m}{X_m + x_{m+1}}\left(\frac{y_{m+1}}{x_{m+1}} - \frac{Y_m}{X_m}\right) \\ \geqq&\frac{X_m}{X_m + x_{m+1}}\left(\frac{y_{m+1}}{x_{m+1}} - \frac{y_m}{x_m}\right)\ (\because\ \text{帰納法の仮定}) \\ \geqq&0 \quad (\because\ ①)\end{aligned}$$

⟵ (1) と同じ変形をする．

したがって，$n=m$ のときも ($*$) は成立する．

(i)，(ii) より，($*$) はすべての自然数 $n$ について成立する．

……(証明終わり)

⟵ (i)，(ii) がセットになって帰納法が機能する．

(3) 右辺と左辺の差をつくると

$$\begin{aligned}
\frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}}-\frac{Y_n}{X_n} &= \frac{Y_n+y_{n+1}}{X_n+x_{n+1}}-\frac{Y_n}{X_n} \\
&= \frac{X_n(Y_n+y_{n+1})-Y_n(X_n+x_{n+1})}{X_n(X_n+x_{n+1})} \\
&= \frac{X_n y_{n+1}-Y_n x_{n+1}}{X_n(X_n+x_{n+1})} \\
&= \frac{1}{X_n+x_{n+1}}\left(y_{n+1}-\frac{Y_n x_{n+1}}{X_n}\right) \\
&= \frac{x_{n+1}}{X_n+x_{n+1}}\left(\frac{y_{n+1}}{x_{n+1}}-\frac{Y_n}{X_n}\right) \\
&\geqq \frac{x_{n+1}}{X_n+x_{n+1}}\left(\frac{y_n}{x_n}-\frac{Y_n}{X_n}\right) \quad (\because \ ①) \\
&\geqq 0 \quad (\because \ (2))
\end{aligned}$$

← (1) と同じ変形をする.

$$\therefore \quad \frac{Y_n}{X_n} \leqq \frac{Y_{n+1}}{X_{n+1}} \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

……(証明終わり)