条件 $a_1=-4,\ a_2=0,\ a_{n+2}-3a_{n+1}+2a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ.

(13 年 奈良県医大 医 15)

$a_n=2^{n+1}-8$

解答は次のページにあります.

【チェック・チェック】

3 項間漸化式の基本問題です.

【解答】

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = 0$$

は $t^2 - 3t + 2 = 0$ の解 $t = 1,\ 2$ を利用すると

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n) \qquad \cdots\cdots ①$$

$$a_{n+2} - 2a_{n+1} = a_{n+1} - 2a_n \qquad \cdots\cdots ②$$

と 2 通りに変形することができる.

←― 与式を 2 通りの等比数列に変形する.
チェクリピ (346)

①より $\{a_{n+1} - a_n\}$ は初項 $a_2 - a_1 = 0 - (-4) = 4$，公比 2 の等比数列であるから

$$a_{n+1} - a_n = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1} \qquad \cdots\cdots ①'$$

また，②より $\{a_{n+1} - 2a_n\}$ は初項 $a_2 - 2a_1 = 0 - 2 \cdot (-4) = 8$，公比 1 の等比数列 (すなわち定数数列) であるから

$$a_{n+1} - 2a_n = 8 \cdot 1^{n-1} = 8 \qquad \cdots\cdots ②'$$

①′，②′ の辺々をひくと

←― ①′，②′ の 2 式を連立する.

$$\boldsymbol{a_n = 2^{n+1} - 8} \qquad \cdots\cdots (答)$$

- ①′ または ②′ の 2 項間漸化式を解くことにより，一般項 a_n を求めることもできるが，①′，②′ の 2 式を連立する方が簡便である.